M. G. BUSATO

SULLE SOLUZIONI A SIMMETRIA RADIALE DELLE EQUAZIONI DI TIPO ELLITTICO IN R^3

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

SOMMARIO

In questo scritto viene brevemente affrontato il problema dell' esistenza di soluzioni a simmetria radiale per le equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico in R^3*. Dopo una breve introduzione, viene affrontato il caso delle equazioni generalizzate di Helmholtz e delle equazioni generalizzate di Helmholtz – Poisson. Viene poi accennato al caso in cui nell'equazione compaiono anche le derivate prime. In Appendice è infine è brevemente discussa la classificazione delle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine in equazioni di tipo ellittico, iperbolico e parabolico.*

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

INDICE GENERALE

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

1. INTRODUZIONE

Consideriamo l'equazione di tipo ellittico:[1]

$$\nabla^2 U + \Phi(x,\, y,\, z\,, U\,, \partial_x U,\, \partial_y U,\, \partial_z U) = 0 \qquad 1.1$$

dove, come di consuetudine si è posto:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad 1.2$$

mentre con Φ si è indicata un'assegnata funzione delle variabili indicate, sulla quale per il momento non faremo alcuna ipotesi.

Diremo che l'equazione 1.1 ammette soluzioni a *simmetria radiale* se, passando alle coordinate sferiche r, q, j legate alle x, y, z per mezzo delle formule di trasformazione:

$$\begin{cases} x = r \sin q \cos j \\ y = r \sin q \sin j \\ z = r \cos q \end{cases} \qquad 1.3$$

essa si riduce ad un'equazione differenziale ordinaria in r, se cioè diviene un'equazione del tipo:

$$f(r, F, F', F'') = 0 \qquad 1.4$$

dove F è una funzione di r.

Diremo altresì *soluzioni a simmetria radiale* dell'equazione 1.1 tutte le funzioni U della forma:

$$U = F(r) \qquad 1.5$$

dove $F(r)$ soddisfa all'equazione 1.4.

Come è noto, nelle coordinate sferiche r, q, j si ha:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin q}\frac{\partial}{\partial q}\left(\sin q \frac{\partial}{\partial q}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 q}\frac{\partial^2}{\partial j^2} \qquad 1.6$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \sin q \cos j \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos q \cos j}{r}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\sin j}{r \sin q}\frac{\partial}{\partial j} \qquad 1.7$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin q \sin j \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos q \sin j}{r}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\cos j}{r \sin q}\frac{\partial}{\partial j} \qquad 1.8$$

---

1) Per maggiori dettagli sulla nozione di "equazione di tipo ellittico" si rimanda alla Appendice 1.

$$\frac{\partial}{\partial z} = \cos q \, \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin q}{r} \, \frac{\partial}{\partial q} \qquad 1.9$$

per cui è facile comprendere che le soluzioni a simmetria radiale della 1.1 dovranno soddisfare alla seguente equazione:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 F') + \tilde{\Phi}(r, q, j, F, F') = 0 \qquad 1.10$$

dove con $\tilde{\Phi}$ si è indicata la funzione che si ottiene dalla Φ esprimendo in essa *x*, *y*, *z* per mezzo delle 1.3 ed $\partial_x U$, $\partial_y U$, $\partial_z U$ per mezzo delle 1.7, 1.8, 1.9 con *U* data dalla 1.5.

Ma l’equazione 1.10 non può chiaramente essere soddisfatta da una funzione *F* della sola variabile *r* se in $\tilde{\Phi}$ compaiono anche le variabili q e j. Si vede quindi che in generale, cioè per una funzione Φ arbitraria, l’equazione 1.1 non ammette soluzioni a simmetria radiale. Affinché ciò avvenga occorre infatti che la funzione Φ abbia forma opportuna. Nel seguito studieremo alcune forme della funzione Φ per le quali l’equazione 1.1 ammette soluzioni a simmetria radiale.

2. EQUAZIONE GENERALIZZATA DI HELMHOLTZ

Supponiamo che nella 1.1 la funzione Φ dipenda unicamente da *U* :

$$\Phi = \Phi(U) \qquad 2.1$$

Consideriamo cioè l’equazione di tipo ellittico (nota come *equazione generalizzata di Helmholtz*):

$$\nabla^2 U + \Phi(U) = 0 \qquad 2.2$$

Passando alle coordinate r, q, j e supponendo $U = F(r)$, l’equazione 2.2 assume la forma:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 F') + \Phi(F) = 0 \qquad 2.3$$

Possiamo quindi concludere che l’equazione 2.2 ammette sempre soluzioni a simmetria radiale, qualunque sia la forma della funzione Φ.

La via più generale per studiare l’equazione 2.3 e quindi per trovare le soluzioni a simmetria radiale dell’equazione 2.2, è quella porre:

$$F(r) = g(r)\, f(r) \qquad 2.4$$

con $g(r)$ ed $f(r)$ funzioni incognite. Così facendo si trova, dopo alcuni semplici passaggi, che:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 F') = g\, f'' + 2\left(g' + \frac{g}{r} \right) f' + \left(g'' + 2\frac{g'}{r} \right) f \qquad 2.5$$

per cui l’equazione 2.3 assume la forma seguente:

$$g\,f''+2\left(g'+\frac{g}{r}\right)f'+\left(g''+2\frac{g'}{r}\right)f+\Phi(g\,f)=0 \qquad 2.6$$

Si può ora giocare sull'arbitrarietà di scelta della funzione $g(r)$ per semplificare l'equazione 2.6 e a tale proposito giova osservare che se si sceglie $g(r)$ affinché risulti:

$$g'+\frac{g}{r}=0 \qquad 2.7$$

allora risulta anche:[2]

$$g''+2\frac{g'}{r}=0 \qquad 2.8$$

per cui in questo caso la 2.6 assume la forma "standardizzata":

$$g(r)f''+\Phi[g(r)f]=0 \qquad 2.9$$

dove ora, ovviamente, $g(r)$ è una funzione nota e precisamente un qualsiasi integrale particolare dell'equazione 2.7. L'integrale generale della 2.7 è:

$$g(r;C)=\frac{C}{r} \qquad 2.10$$

dove C è una costante arbitraria, quindi come funzione $g(r)$ possiamo prendere la seguente:

$$g(r)=\frac{1}{r} \qquad 2.11$$

Con tale scelta, l'equazione 2.9 assume allora la forma "normalizzata":

$$f''+r\,\Phi(f/r)=0 \qquad 2.12$$

Abbiamo così trovato che le soluzioni a simmetria radiale dell'equazione 2.2 sono del tipo:

$$F(r)=\frac{f(r)}{r} \qquad 2.13$$

dove $f(r)$ soddisfa all'equazione differenziale 2.12.

Esempio 1.1 Equazione di Helmholtz

Fra le equazioni del tipo ora considerato rientra la celebre equazione (detta di Helmholtz):

$$\nabla^2 U+k^2 U=0 \qquad 2.14$$

dove k è una costante reale. Nel caso ora in esame l'equazione 2.12 assume la forma:

---

2) Infatti, derivando la 2.7 ed osservando che per la 2.7 stessa si ha $g' = -g/r$, si ottiene la 2.8.

$$f\,'' + k^2 f = 0 \qquad 2.15$$

L’integrale generale della 2.15, considerata in campo complesso, è:

$$f(r\,;C) = C\,e^{ikr} \qquad 2.16$$

dove C è una costante arbitraria. Possiamo quindi concludere, in forza della 2.13, che le soluzioni a simmetria radiale dell’equazione 2.14 sono del tipo:

$$F(r) = \frac{e^{ikr}}{r} \qquad 2.17$$

La 2.17 è nota anche come *soluzione fondamentale* dell’equazione di Helmholtz.

3. EQUAZIONE GENERALIZZATA DI HELMHOLTZ – POISSON

Supponiamo che nella 1.1 la funzione Φ dipenda sia da x, y, z che da U :

$$\Phi = \Phi(x, y, z, U) \qquad 3.1$$

Consideriamo cioè l’equazione di tipo ellittico (nota come *equazione generalizzata di Helmholtz – Poisson*):[3]

$$\nabla^2 U + \Phi(x, y, z, U) = 0 \qquad 3.2$$

Passando alle coordinate r, q, j e supponendo $U = F(r)$, l’equazione 3.2 assume la forma:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 F\,') + \Phi(r \sin q \cos j\,, r \sin q \cos j\,, r \cos q\,, F) = 0 \qquad 3.3$$

per cui possiamo concludere che l’equazione 3.2 non ammette in generale soluzioni a simmetria radiale. L’equazione 3.2 ammette tuttavia soluzioni a simmetria radiale qualora sia:

$$\Phi = \Phi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, U) \qquad 3.4$$

In tal caso infatti, l’equazione 3.3 assume la forma:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2 F\,') + \Phi(r, F) = 0 \qquad 3.5$$

Ponendo:

$$F(r) = g(r)\, f(r) \qquad 3.6$$

con $g(r)$ ed $f(r)$ funzioni incognite, la 3.5 diviene:

---

[3] Se la funzione Φ dipende unicamente da x, y, z, allora l’equazione 3.2 è detta “equazione di Poisson”.

$$g\, f\,''+2\left(g'+\frac{g}{r}\right)f\,'+\left(g\,''+2\frac{g\,'}{r}\right)f+\Phi(r, g\, f)=0 \qquad 3.7$$

per cui, procedendo come nel caso della 2.2, possiamo concludere che le soluzioni a simmetria radiale dell'equazione:

$$\nabla^2 U+\Phi(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,U)=0 \qquad 3.8$$

hanno la forma seguente:

$$F(r)=\frac{f(r)}{r} \qquad 3.9$$

dove $f(r)$ soddisfa l'equazione differenziale ordinaria:

$$f\,''+r\,\Phi(r,\ f/r)=0 \qquad 3.10$$

Si noti che fra le equazioni del tipo ora considerato rientra anche l'equazione di Helmholtz qualora in essa si supponga k funzione di r, cioè $k=k(r)$.

4. CENNO AL CASO IN CUI COMPAIONO LE DERIVATE PRIME

Limitiamoci a considerare il caso di equazioni di tipo ellittico della forma seguente:

$$\nabla^2 U+\Phi(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,,U,\partial_x U,\partial_y U,\partial_z U)=0 \qquad 4.1$$

Per studiare quali eventuali condizioni sulla dipendenza dalle derivate prime di U debba avere la funzione Φ affinché l'equazione 4.1 ammetta soluzioni a simmetria radiale, conviene riscrivere le 1.7, 1.8, 1.9 avvalendosi delle formule di trasformazione 1.3. Supponendo $U=F(r)$, è facile vedere, utilizzando le 1.3, che le 1.7, 1.8, 1.9 si possono rappresentare nel modo seguente:

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{x}{r}\frac{d}{dr} \qquad 4.2$$

$$\frac{\partial}{\partial y}=\frac{y}{r}\frac{d}{dr} \qquad 4.3$$

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{z}{r}\frac{d}{dr} \qquad 4.4$$

E' chiaro allora che passando alle coordinate r,q,j l'equazione 4.1 ammetterà senz'altro soluzioni a simmetria radiale se le derivate di U compaiono in Φ in una delle seguenti tre combinazioni:

(A) $$y\frac{\partial U}{\partial x}-x\frac{\partial U}{\partial y} \quad ; \quad z\frac{\partial U}{\partial x}-x\frac{\partial U}{\partial z} \quad ; \quad z\frac{\partial U}{\partial y}-y\frac{\partial U}{\partial z} \qquad 4.5$$

(B) $\quad x\frac{\partial U}{\partial x}+y\frac{\partial U}{\partial y}+z\frac{\partial U}{\partial z}$ 4.6

(C) $\quad \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2$ 4.7

In tutte le situazioni considerate infatti, l'equazione 4.1 sarà ricondotta ad una equazione differenziale ordinaria della forma seguente:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dF}{dr}\right)+\tilde{\Phi}(r,F,F')=0 \qquad 4.8$$

dove con $\tilde{\Phi}(r,F,F')$ si è indicata la funzione che si ottiene dalla Φ eseguendo in essa le sostituzioni: $\sqrt{x^2+y^2+z^2}\rightarrow r$, $\partial_x U\rightarrow x/r\,F'$, $\partial_y U\rightarrow y/r\,F'$, $\partial_z U\rightarrow z/r\,F'$.

Ponendo:

$$F(r)=g(r)\,f(r) \qquad 4.9$$

la 4.8 prende la forma:

$$g\,f''+2\left(g'+\frac{g}{r}\right)f'+\left(g''+2\frac{g'}{r}\right)f+\tilde{\Phi}(r,g\,f,g'\,f+g\,f')=0 \qquad 4.10$$

e questa equazione potrà essere studiata scegliendo g in modo da annullare il secondo ed il terzo termine (come si è fatto nei casi precedenti) oppure scegliendo g in modo opportuno in base alla forma della funzione $\tilde{\Phi}$. Oltre, su questo argomento non ci dilungheremo.

Appendice 1 Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico, iperbolico e parabolico

La classificazione in tipo ellittico, iperbolico e parabolico delle equazioni alle derivate parziali si applica alle equazioni alle derivate parziali del secondo ordine in R^n della forma seguente, cioè lineari rispetto alle derivate seconde:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_1,...,x_n)\frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi\left(x_1,...,x_n,U,\frac{\partial U}{\partial x_1},...,\frac{\partial U}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad \text{A1.1}$$

Eseguendo in R^n un cambiamento di variabile $x_1,...,x_n \to y_1,...,y_n$, l'equazione A1.1 assume chiaramente un'espressione diversa da quella che ha nelle coordinate $x_1,...,x_n$, ma rimane tuttavia della stessa forma. Nelle coordinate $y_1,...,y_n$ l'equazione A1.1 potrà quindi essere scritta nella forma seguente:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \tilde{a}_{ij}(y_1,...,y_n)\frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j} + \tilde{\Phi}\left(y_1,...,y_n,U,\frac{\partial U}{\partial y_1},...,\frac{\partial U}{\partial y_n}\right) = 0 \qquad \text{A1.2}$$

Definizione A1.1

- Si dice che l'equazione A1.1 è di <u>tipo ellittico nel punto P</u> di R^n se esiste in R^n un sistema di coordinate $y_1,...,y_n$ per cui in P la matrice formata dalle funzioni $\tilde{a}_{ij}$ è la matrice identità di R^n.
- Si dice che l'equazione A1.1 è di <u>tipo iperbolico di grado *m* nel punto P</u> di R^n se esiste in R^n un sistema di coordinate $y_1,...,y_n$ per cui in P la matrice formata dalle funzioni $\tilde{a}_{ij}$ è la matrice identità di $R^{n-m,m}$ ($m<n$). Se $m=1$, l'equazione A1.1 è detta di <u>tipo iperbolico in P</u>.
- Si dice che l'equazione A1.1 è di <u>tipo parabolico di grado *m* nel punto P</u> di R^n se esiste in R^n un sistema di coordinate $y_1,...,y_n$ per cui in P la matrice formata dalle funzioni $\tilde{a}_{ij}$ è la matrice formata dalla semisomma della matrice identità di R^n con la matrice identità di $R^{n-m,m}$ ($m<n$).

Definizione A1.2

- Si dice che l'equazione A1.1 è di <u>tipo ellittico</u> se essa è di tipo ellittico in ogni punto P di R^n in cui è definita.
- Si dice che l'equazione A1.1 è di <u>tipo iperbolico di grado *m*</u> se essa è di tipo iperbolico di grado *m* in ogni punto P di R^n in cui è definita. Se $m=1$ l'equazione A1.1 è detta di <u>tipo iperbolico</u>.
- Si dice che l'equazione A1.1 è di <u>tipo parabolico di grado *m*</u> se essa è di tipo parabolico di grado *m* in ogni punto P di R^n in cui è definita.
- L'equazione A1.1 si dice di <u>tipo misto</u> se essa non è dello stesso tipo in ogni punto P di R^n in cui è definita.

Chiaramente, in forza di quanto precede risulta che:

(A) un'equazione di tipo ellittico può essere sempre ricondotta alla "forma normale":

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} + \bar{\Phi}\left(y_1,...,y_n,U,\frac{\partial U}{\partial y_1},...,\frac{\partial U}{\partial y_n}\right) = 0 \qquad \text{A1.3}$$

(B) un’equazione di tipo iperbolico di grado *m* può essere sempre ricondotta alla “forma normale”:

$$\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^{\,2}}-\sum_{i=n-m+1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^{\,2}}+\overline{\Phi}\left(y_1,\dots,y_n,U,\frac{\partial U}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial U}{\partial y_n}\right)=0 \qquad \text{A1.4}$$

(C) un’equazione di tipo parabolico di grado *m* può essere sempre ricondotta alla “forma normale”:

$$\sum_{i=1}^{n-m}\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^{\,2}}+\overline{\Phi}\left(y_1,\dots,y_n,U,\frac{\partial U}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial U}{\partial y_n}\right)=0 \qquad \text{A1.5}$$

Per maggiori dettagli sull’argomento trattato si rimanda alla letteratura specializzata.

<u>NOTA</u>

Per la matrice identità di $R^{n-m,m}$, che qui indicheremo con $\mathbf{I}^{(n,m)}$, abbiamo assunto la seguente convenzione:

$$\mathbf{I}^{(n,m)}=\mathrm{diag}[\underbrace{1,\dots,1}_{n},\underbrace{-1,\dots,-1}_{m}] \qquad \text{A1.6}$$

Chiaramente, la matrice identità di R^n, cioè la matrice $\mathbf{I}^{(n)}$, si identifica con la matrice $\mathbf{I}^{(n,0)}$. E’ evidente che (caso delle equazioni di tipo parabolico di grado *m*):

$$\frac{1}{2}(\mathbf{I}^{(n)}+\mathbf{I}^{(n,m)})=\mathrm{diag}[\underbrace{1,\dots,1}_{n},\underbrace{0,\dots,0}_{m}] \qquad \text{A1.7}$$

BIBLIOGRAFIA GENERALE

[1] A. N. Tichonov – A. A. Samarskij, “Equazioni della Fisica matematica”, Edizioni MIR

[2] F. G. Tricomi, “equazioni a Derivate Parziali”, Edizioni Cremonese

[3] E. De Castro, “Complementi di Analisi Matematica”, Zanichelli

[4] L. Brasca, “Tavole Matematiche”, Ghisetti & Corvi