

DIMOSTRAZIONE DEL PERCHÉ AD UN UOVO CRUDO APPOGGIATO SU UN TAVOLO NON SI RIESCE AD IMPRIMERE UNA RAPIDA ROTAZIONE ASSIALE (COSA INVECE POSSIBILE PER UN UOVO SODO).

Come è noto, se ad un uovo sodo appoggiato su un tavolo viene impressa una rapida rotazione assiale, l'uovo mantiene tale rotazione per un tempo abbastanza lungo. Se invece la stessa prova viene fatta con un uovo crudo allora la rotazione subisce in un tempo molto breve un calo notevole e poco dopo finisce. La differenza di comportamento nelle due situazioni ora considerate dipende dal fatto che quando l'uovo è sodo il suo interno si può considerare solidale al guscio per cui l'uovo è in sostanza un corpo solido, mentre quando l'uovo è crudo il suo interno è liquido e quindi è soggetto al cosiddetto "sloshing".⁽¹⁾ Per spiegare il fenomeno in esame senza ricorrere alla dinamica dei fluidi, identifichiamo l'uovo con il modello meccanico mostrato nella seguente Figura 1.

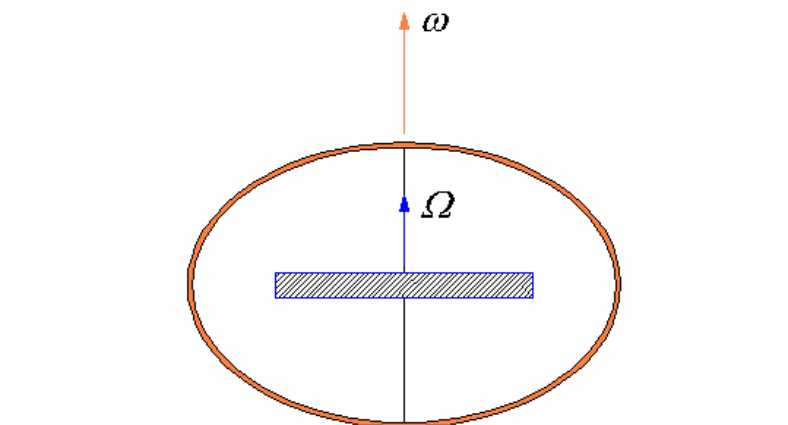


Figura 1

Il guscio è schematizzato con un sottile involucro ellissoidale, rigido ed omogeneo, e la chiara ed il tuorlo sono schematizzati con un disco circolare pesante, anch'esso omogeneo, in grado di ruotare autonomamente all'interno dell'involucro ellissoidale grazie ad un'asta rigida, di massa trascurabile, solidale al disco e passante per il suo centro (si suppone che in un qualche modo l'asta sia costantemente a contatto con la superficie interna dell'involucro ellissoidale). Fra le estremità dell'asta e l'involucro ellissoidale dobbiamo supporre che si manifesti una coppia di tipo viscoso Γ_r , non nulla se l'involucro ellissoidale ed il disco hanno velocità di rotazione diversa. Dobbiamo supporre inoltre che il disco sia soggetto ad una coppia frenante di tipo viscoso Γ_m , dipendente dalla sola velocità di rotazione del disco. La coppia Γ_r sintetizza l'interazione viscosa fra il guscio e la chiara, mentre la coppia Γ_m sintetizza lo smorzamento del moto della chiara a causa della sua viscosità. Possiamo invece trascurare l'azione dell'attrito di giro sull'involucro ellissoide. Infatti, in generale, l'effetto dell'attrito di giro è trascurabile rispetto all'azione delle coppie Γ_r e Γ_m e la sua introduzione complicherebbe inutilmente la trattazione matematica in quanto occorrerebbe spezzare lo studio del problema in vari stadi successivi (come si deve fare, ad esempio, quando si considera il moto di un punto materiale vincolato a muoversi su una superficie scabra sotto l'azione di una forza di richiamo elastico). Sempre per non complicare la trattazione matematica, possiamo assumere che

¹⁾ Ricordiamo che si col termine "sloshing" si intende il movimento che si induce in un fluido racchiuso in un contenitore a causa del moto del contenitore stesso. Tale movimento ha poi ovviamente anche un effetto sul moto del contenitore.

l'involucro ellissoidale abbia simmetria di rotazione e trascurare i moti di precessione e nutazione dell'involucro ellissoidale e del disco. Il nostro scopo infatti è dare una spiegazione del fenomeno e non studiare in dettaglio la rotazione dell'uovo. Così facendo allora, le rotazioni del sistema in esame avvengano costantemente attorno ad un asse perpendicolare al piano di appoggio, come mostrato in Figura 1 ed il sistema ha due soli gradi di libertà, con notevole semplificazione delle equazioni del moto.

Sia m_e la massa dell'involucro ellissoidale (coincidente con la massa del guscio) ed m_d la massa del disco (coincidente con la massa della chiara e del tuorlo, e quindi maggiore di quella del guscio). Indichiamo quindi, come mostrato in Figura 1, con \mathbf{w} la velocità di rotazione dell'involucro ellissoidale e con \mathbf{W} la velocità di rotazione del disco. Sia infine J_e il momento d'inerzia dell'involucro ellissoidale e J_d il momento d'inerzia del disco attorno all'asse di rotazione considerato; chiaramente, $J_d > J_e$. Allora, le equazioni del moto del nostro sistema sono le seguenti:

$$\frac{1}{2} J_e \dot{\mathbf{w}} = -\Gamma_t \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} J_d \dot{\mathbf{W}} = \Gamma_t + \Gamma_m \quad (2)$$

dove, per quanto precedentemente detto, dobbiamo assumere:

$$\Gamma_t = \mathbf{e} (\mathbf{w} - \mathbf{W}) \quad (3)$$

$$\Gamma_m = -\mathbf{m}\mathbf{W} \quad (4)$$

Nella (3), con \mathbf{e} si è indicato il coefficiente di accoppiamento viscoso fra involucro ellissoidale e disco, mentre nella (4) con \mathbf{m} si è indicato il coefficiente di smorzamento viscoso della rotazione del disco. Chiaramente, $\mathbf{e}, \mathbf{m} > 0$.

Avvalendosi delle (3) e (4) le (1) e (2) assumono la forma seguente:

$$\frac{1}{2} J_e \dot{\mathbf{w}} = -\mathbf{e} (\mathbf{w} - \mathbf{W}) \quad (5)$$

$$\frac{1}{2} J_d \dot{\mathbf{W}} = \mathbf{e} (\mathbf{w} - \mathbf{W}) - \mathbf{m}\mathbf{W} \quad (6)$$

Alle equazioni (5) e (6), devono poi associarsi le condizioni iniziali:

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0 \quad (7)$$

$$\mathbf{W}(0) = 0 \quad (8)$$

Esplicitando \mathbf{w} dalla (6) si ottiene:

$$\mathbf{w} = \frac{J_d}{2\mathbf{e}} \dot{\mathbf{W}} + \frac{\mathbf{e} + \mathbf{m}}{\mathbf{e}} \mathbf{W} \quad (9)$$

e quindi anche:

$$\dot{\mathbf{w}} = \frac{J_d}{2\mathbf{e}} \ddot{\mathbf{W}} + \frac{\mathbf{e} + \mathbf{m}}{\mathbf{e}} \dot{\mathbf{W}} \quad (10)$$

Per cui è possibile eliminare \mathbf{w} nella (5) ottenendo un'equazione differenziale lineare del secondo ordine in \mathbf{W} , che integrata in conformità ad opportune condizioni iniziali, risolve in pratica il problema in esame, in quanto, nota la funzione $\mathbf{W}(t)$, dalla (9) si ottiene la funzione $\mathbf{w}(t)$. L'equazione alla quale \mathbf{W} deve soddisfare è la seguente:

$$\ddot{\mathbf{W}} + \frac{2\mathbf{e}}{J_d} \left[\frac{J_d + J_e}{J_e} + \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}} \right] \dot{\mathbf{W}} + \frac{4\mathbf{e}\mathbf{m}}{J_d J_e} \mathbf{W} = 0 \quad (11)$$

mentre le condizioni iniziali che ad essa devono associarsi sono:

$$\mathbf{W}(0) = 0 \quad (12)$$

$$\dot{\mathbf{W}}(0) = \frac{2\mathbf{e}}{J_d} \mathbf{w}_0 \quad (13)$$

La (12) è la (7) mentre la (13) si ottiene dalla (9) avvalendosi della (7) e della (8).

Come è noto, l'integrale generale della equazione (11) è la funzione biparametrica:

$$\mathbf{W}(t; c_1, c_2) = c_1 e^{I_1 t} + c_2 e^{I_2 t} \quad (14)$$

dove c_1, c_2 sono costanti arbitrarie mentre I_1, I_2 sono le radici dell'equazione algebrica:

$$I^2 + \frac{2\mathbf{e}}{J_d} \left[\frac{J_d + J_e}{J_e} + \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}} \right] I + \frac{4\mathbf{e}\mathbf{m}}{J_d J_e} = 0 \quad (15)$$

Imponendo alla (14) le condizioni iniziali (12) e (13) risulta che le costanti c_1, c_2 debbono soddisfare al seguente sistema algebrico lineare:

$$c_1 + c_2 = 0 \quad (16)$$

$$I_1 c_1 + I_2 c_2 = \frac{2\mathbf{e}}{J_d} \mathbf{w}_0 \quad (17)$$

per cui, osservando che le radici della equazione (15) risultano:

$$I_{1,2} = -\frac{\mathbf{e}}{J_d} \left[\frac{J_d + J_e}{J_e} + \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}} \pm \sqrt{\frac{(J_d + J_e)^2}{J_e^2} - \frac{2(J_d - J_e)}{J_e} \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}} + \left(\frac{\mathbf{m}}{\mathbf{e}}\right)^2} \right] \quad (18)$$

possiamo concludere che la funzione $W(t)$ soluzione del problema differenziale (11), (12), (13) risulta la seguente:

$$W(t) = \frac{w_0 (e^{I_1 t} - e^{I_2 t})}{\sqrt{\frac{(J_d + J_e)^2}{J_e^2} - \frac{2(J_d - J_e)}{J_e} \frac{m}{e} + \left(\frac{m}{e}\right)^2}} \quad (19)$$

E' necessario a questo punto studiare il segno delle radici I_1, I_2 in quanto esso caratterizza le proprietà della funzione $W(t)$. E' facile vedere che comunque siano i valori di e e m si ha:

$$\frac{(J_d + J_e)^2}{J_e^2} - \frac{2(J_d - J_e)}{J_e} \frac{m}{e} + \left(\frac{m}{e}\right)^2 > 0 \quad (20)$$

Infatti, il discriminante Δ dell'equazione di secondo grado in m/e che si ottiene uguagliando a zero il primo membro della (20) è:

$$\Delta = -\frac{16J_d}{J_e} \quad (21)$$

per cui, essendo per definizione $J_d, J_e > 0$, si ha sempre $\Delta < 0$ e l'equazione considerata non ammette radici reali. Il primo membro della (20) è quindi effettivamente sempre positivo in quanto lo è ad esempio per $m/e = 0$.

In virtù della (20), il denominatore della (19) è quindi sempre reale e positivo. I valori di I_1, I_2 sono invece entrambi sempre reali e negativi. Infatti il termine fra parentesi quadre a secondo membro della (18) ha la forma seguente:

$$a + x \pm \sqrt{a^2 + x^2 - bx} \quad (22)$$

dove a e b sono due costanti positive, tali che $a^2 + x^2 - bx > 0$ per ogni valore reale di x (ciò in virtù della (20)). Esso perciò è sempre positivo in quanto:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 + x^2 - bx} &= \sqrt{a^2 + x^2 + 2ax - 2ax - bx} = \sqrt{(a+x)^2 \left(1 - \frac{(2a+b)x}{(a+x)^2}\right)} = \\ &= (a+x) \sqrt{1 - \frac{(2a+b)x}{(a+x)^2}} < a+x \end{aligned} \quad (23)$$

Possiamo quindi concludere che il moto del disco è sempre di tipo aperiodico smorzato, indipendentemente dai valori di J_d, J_e, e, m , ed altrettanto lo è quello dell'involucro ellissoidale in virtù della (9). Non ci soffermeremo oltre su un'analisi formale del moto del sistema meccanico considerato e ci limitiamo solo a riportare qui di seguito, in Figura 2, l'andamento tipico delle funzioni $W(t)$ ed $w(t)$ che descrivono il moto di rotazione del disco e dell'involucro ellissoidale per le condizioni iniziali da noi considerate.

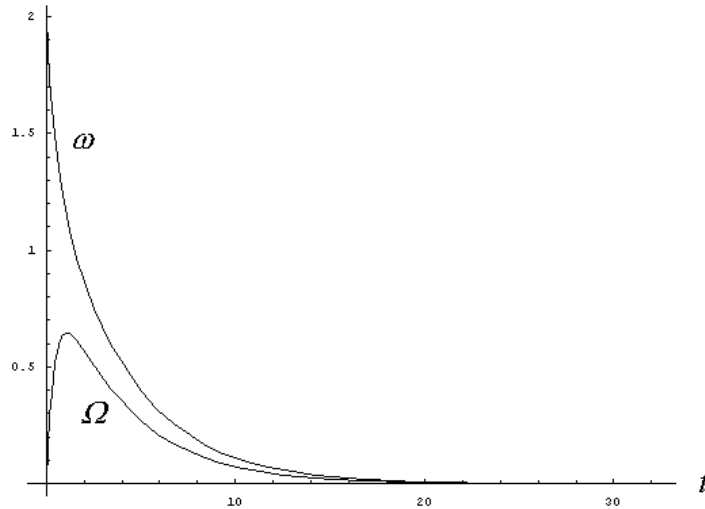


Figura 2

Come si vede, il modello di uovo crudo da noi considerato mette in evidenza come la rotazione della chiara provochi un brusco trasferimento di momento angolare dal guscio alla chiara stessa e ciò rende conto del perché con un uovo crudo si manifesti il fenomeno del rapido smorzamento della rotazione. Si tenga presente infatti che il peso del guscio è notevolmente inferiore a quello dell'interno dell'uovo e, come si potrebbe verificare con un'analisi della funzione $W(t)$, più il rapporto J_d / J_e è grande, più il trasferimento di momento angolare dall'involucro ellissoidale al disco è rapido e rilevante (anche se poi, a parità di e e m , il tempo di arresto è maggiore). La seguente Figura 3, illustra quanto ora detto.

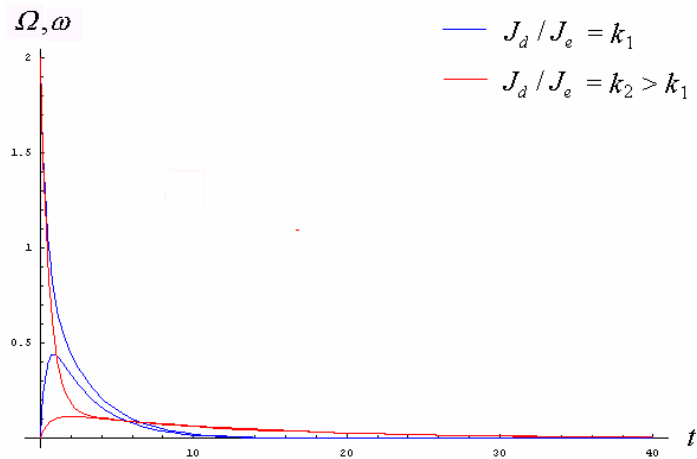


Figura 3

Concludiamo la presente nota considerando il caso di un uovo sodo. In questa situazione, come si è già detto, l'uovo si può assimilare ad un corpo rigido e quindi, con lo schema precedentemente adottato (dove ora il disco si deve assumere rigidamente connesso all'involucro), la sua rotazione può essere descritta per mezzo del seguente problema differenziale del primo ordine:

$$\frac{1}{2} (J_e + J_d) \dot{W} = -h (m_e + m_g) g \quad (24)$$

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0 \tag{25}$$

dove a secondo membro si è introdotto l'attrito di giro, caratterizzato dal coefficiente dimensionale h ; nella (24) g è l'accelerazione di gravità. Si noti che l'introduzione dell'attrito di giro è ora essenziale per giustificare lo smorzamento della rotazione e per il sistema in esame non crea problemi formali. Come si vede, nel caso di un uovo sodo lo smorzamento della rotazione assiale risulta lineare e non esponenziale come nel caso precedentemente considerato. Esso inoltre è molto piccolo poiché tale è di norma il valore di h (a meno di superfici particolarmente frenanti come nel caso delle tovaglie di spugna). La rotazione di un uovo sodo prosegue quindi per un tempo notevole con uno smorzamento lento e graduale.

M. G. Busato