M. G. BUSATO

ALCUNE PROPRIETÀ DESCRITTIVE DELLA RAPPRESENTAZIONE INTEGRALE DI FOURIER IN CAMPO REALE

SOMMARIO

In questo scritto vengono illustrate alcune proprietà descrittive della rappresentazione integrale di Fourier in campo reale e cioè quando la funzione trasformanda è una funzione reale di variabile reale. In particolare, senza entrare in dettagli matematici superflui ai fini pratici, vengono studiate le proprietà di simmetria della funzione trasformata e viene mostrato che tale funzione è apprezzabilmente non nulla solo in un opportuno intervallo la cui ampiezza è inversamente proporzionale all'intervallo in cui si può considerare apprezzabilmente non nulla la funzione trasformanda. Le proprietà di simmetria della funzione trasformata sono dimostrate in modo rigoroso mentre la dimostrazione del fatto che la funzione trasformata è apprezzabilmente non nulla solo in un opportuno intervallo è compiuta adottando una tecnica costruttiva euristica, particolarmente espressiva, che fornisce anche un metodo di valutazione della funzione stessa. Lo scritto contiene anche due Appendici. Nella prima è riportata una tecnica di valutazione più accurata dell'integrale di Fourier basata sulla formula di Simpson. Nella seconda è invece mostrata una generalizzazione della rappresentazione integrale di Fourier che consente di studiare problemi più generali.

1. INTRODUZIONE

In molti problemi di Fisica-Matematica occorre spesso utilizzare funzioni di variabile reale $f(x)$ definite dalla seguente rappresentazione intergale, detta *rappresentazione integrale di Fourier*:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{ixk}\, dk \qquad 1.1$$

dove $F(k)$ è una funzione reale di variabile reale, continua e per la quale si suppone che l'integrale a secondo membro esista in corrispondenza di ogni valore reale di x. In questo scritto, senza entrare in dettagli matematici superflui ai fini pratici, ci proponiamo di studiare le principali proprietà di tali funzioni ed in particolare di dimostrarne le seguenti due, particolarmente utili nelle applicazioni concrete:

<u>Proprietà 1</u>:

- La funzione $f(x)$ è in generale una funzione complessa con parte reale pari e parte immaginaria dispari. Se però $F(k)$ è una funzione pari, allora $f(x)$ è una funzione reale (necessariamente pari), mentre se $F(k)$ è una funzione dispari, allora $f(x)$ è una funzione immaginaria (necessariamente dispari).

<u>Proprietà 2</u>:

- Se $F(k)$ è una funzione apprezzabilmente non nulla solo nell'intervallo $[-e, e]$, allora $f(x)$ è una funzione apprezzabilmente non nulla solo in un intervallo $[-\overline{x}, \overline{x}]$ con $\overline{x}$ valore opportuno. Fra e ed $\overline{x}$ sussiste la seguente relazione:

  $$\overline{x}\, e \geq m \qquad 1.2$$

  dove m è una costante il cui valore dipende unicamente dalla funzione $F(k)$.

Mentre la dimostrazione della "Proprietà 1" può essere compiuta in modo rigoroso e generale senza difficoltà, la dimostrazione della "Proprietà 2" risulta più complessa. Noi la effettueremo ricorrendo ad una tecnica costruttiva essenzialmente euristica che però, oltre ad essere particolarmente espressiva, fornisce anche un metodo di valutazione numerica dell'integrale in questione. In Appendice 1 è poi riportata una tecnica di valutazione più accurata dell'integrale 1.1 basata sulla formula di Simpson.

2. DIMOSTRAZIONE DELLA "PROPRIETÀ 1"

Dobbiamo innanzitutto verificare che la funzione $f(x)$ definita dalla 1.1 è in generale una funzione complessa con parte reale pari e parte immaginaria dispari, cioè tale che:

$$\mathrm{Re}[f(-x)] = \mathrm{Re}[f(x)] \qquad 2.1$$

$$\mathrm{Im}[f(-x)] = -\mathrm{Im}[f(x)] \qquad 2.2$$

Per fare ciò osserviamo innanzitutto che passando alla rappresentazione trigonometrica dell'esponenziale complesso, cioè scrivendo:

$$e^{ixk} = \cos(xk) + i\sin(xk) \qquad 2.3$$

la 1.1 assume la forma seguente:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\cos(xk)dk \;\; + \;\; i \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\sin(xk)dk \qquad 2.4$$

da cui segue che:

$$\mathrm{Re}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\cos(xk)dk \qquad 2.5$$

$$\mathrm{Im}[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\sin(xk)dk \qquad 2.6$$

Ma il coseno è una funzione pari ed il seno è una funzione dispari, per cui:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\cos(xk)dk \;\; = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\cos(-xk)dk \;\; \equiv \; \mathrm{Re}[f(-x)] \qquad 2.7$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\sin(xk)dk \;\; = -\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\sin(-xk)dk \;\; \equiv \; -\mathrm{Im}[f(-x)] \qquad 2.8$$

Confrontando la 2.7 con la 2.5 e la 2.8 con la 2.6 si vede allora che le condizioni 2.1 e 2.2 risultano provate e quanto affermato è dimostrato.

Dobbiamo ora verificare che se $F(k)$ è una funzione pari, cioè tale che:

$$F(-k) = F(k) \qquad 2.9$$

allora $f(x)$ è una funzione reale (necessariamente pari in virtù della 2.1) e che se $F(k)$ è una funzione dispari, cioè tale che:

$$F(-k) = -F(k) \qquad 2.10$$

allora $f(x)$ è una funzione immaginaria (necessariamente dispari in virtù della 2.2).

Per fare ciò osserviamo innanzitutto che essendo per ipotesi $F(k)$ una funzione reale, la complessa coniugata di $f(x)$, cioè la funzione $\overline{f}(x)$, presenta la seguente rappresentazione integrale:

$$\overline{f}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}F(k)e^{-ixk}dk \qquad 2.11$$

Chiaramente, la funzione $f(x)$ è reale se:

$$\overline{f}(x)=f(x) \qquad 2.12$$

mentre la funzione $f(x)$ è immaginaria se:

$$\overline{f}(x)=-f(x) \qquad 2.13$$

Eseguendo nell'integrale a secondo membro della 2.11 il cambiamento di variabile:

$$k=-h \qquad 2.14$$

si ottiene:

$$\overline{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty}F(k)e^{-ixk}dk = -\int_{+\infty}^{-\infty}F(-h)e^{ixh}dh = \int_{-\infty}^{+\infty}F(-h)e^{ixk}dh \qquad 2.15$$

Ma allora è evidente che se $F(k)$ è una funzione pari cioè soddisfa alla condizione 2.9, la funzione $f(x)$ soddisfa alla condizione 2.12 e quindi è reale, e che se $F(k)$ è una funzione dispari cioè soddisfa alla condizione 2.10, la funzione $f(x)$ soddisfa alla condizione 2.13 e quindi è immaginaria. Ciò completa la dimostrazione di quella che abbiamo definito "Proprietà 1" della funzione $f(x)$.

3. DIMOSTRAZIONE DELLA "PROPRIETÀ 2"

Dobbiamo verificare che se nella 1.1 $F(k)$ è una funzione apprezzabilmente non nulla solo nell'intervallo $[-e,e]$, allora $f(x)$ è una funzione apprezzabilmente non nulla solo nell'intervallo $[-\overline{x},\overline{x}]$ con $\overline{x}$ valore opportuno, soddisfacente alla condizione 1.2. Per fare ciò osserviamo allora che nell'ipotesi in esame la funzione $f(x)$ si può considerare definita mediante la seguente rappresentazione integrale:

$$f(x)=\int_{-e}^{+e}F(k)e^{ixk}dk \qquad 3.1$$

Per dimostrare la "Proprietà 2" della funzione $f(x)$, bisogna quindi innanzitutto verificare che l'integrale a secondo membro della 3.1 risulta apprezzabilmente diverso da zero solo in un opportuno intorno di $x=0$. A tale scopo osserviamo allora che se l'intervallo $[0,e]$ è suddiviso in N parti uguali di ampiezza:

$$\Delta k=\frac{e}{N} \qquad 3.2$$

come è schematizzato in Figura 3.1 di pagina seguente, allora si ha:

$$\int_{-e}^{+e} F(k)e^{ixk}dk \;=\; \sum_{n=-N}^{N-1} \int_{n\Delta k}^{(n+1)\Delta k} F(k)e^{ixk}dk \qquad 3.3$$

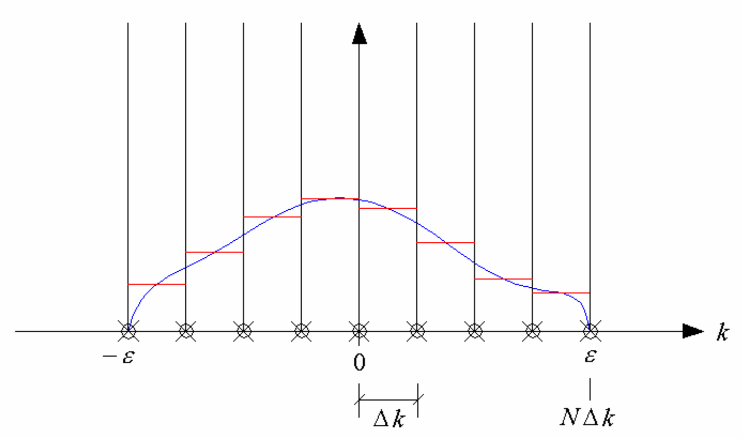

Figura 3.1

Ora, se gli intervallini Δk sono sufficientemente piccoli, cioè se N è abbastanza grande, la funzione $F(k)$ in ciascun intervallino può essere sostituita con il suo valore nel punto medio dell'intervallino stesso come è schematizzato nella stessa Figura 3.1, per cui la 3.3 può essere scritta nella forma seguente:

$$\int_{-e}^{+e} F(k)e^{ixk}dk \;\simeq\; \sum_{n=-N}^{N-1} \int_{n\Delta k}^{(n+1)\Delta k} F_n e^{ixk}dk \qquad 3.4$$

dove si è posto:

$$F_n = F\left(\frac{2n+1}{2}\Delta k\right) \qquad n = -N,\ 1-N,\ \ldots,\ -1,\ 0,\ 1,\ \ldots,\ N-2,\ N-1 \qquad 3.5$$

Utilizzando Mathematica® si trova che in generale, comunque siano i valori di k_1 e k_2:

$$\int_{k_1}^{k_2} e^{ixk}dk \;=\; -\frac{i}{x}\left(e^{ixk_2} - e^{ixk_1}\right) \qquad 3.6$$

ovvero, passando alla rappresentazione trigonometrica dei numeri complessi:

$$\int_{k_1}^{k_2} e^{ixk}dk \;=\left(\frac{\sin(k_2x)}{x} - \frac{\sin(k_1x)}{x}\right) - i\left(\frac{\cos(k_2x)}{x} - \frac{\cos(k_1x)}{x}\right) \qquad 3.7$$

E' evidente che l'intergale a primo membro della 3.6 esiste per ogni valore di x, compreso $x=0$ in in cui esso assume manifestamente il valore $k_2 - k_1$. Mostriamo ora che la 3.7 rappresenta effettivamente l'integrale considerato per ogni valore di x e che:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \int_{k_1}^{k_2} e^{ixk} dk = 0 \qquad 3.8$$

$$\lim_{x \to 0} \int_{k_1}^{k_2} e^{ixk} dk = (k_2 - k_1) \qquad 3.9$$

Chiaramente, il secondo membro della 3.7 è definito per ogni x eccetto che per $x = 0$ e si annulla quando $x \to \pm\infty$ poiché il seno ed il coseno sono funzioni limitate. Ciò dimostra la 3.8. Studiamo ora il comportamento del secondo membro della 3.7 quando $x \to 0$ e a tale scopo ricordiamo che nel limite di $x \to 0$ il seno ed il coseno presentano, qualunque sia il valore di l, i seguenti sviluppi in serie di Taylor:

$$\sin(l\,x) = l\,x - \frac{(l\,x)^3}{6} + O(x^5) \qquad 3.10$$

$$\cos(l\,x) = 1 - \frac{(l\,x)^2}{2} + O(x^4) \qquad 3.11$$

Utilizzando le 3.10 e 3.11 possiamo quindi scrivere per $x \to 0$:

$$\frac{\sin(k_2 x)}{x} = \frac{1}{x}[k_2 x + O(x^3)] = k_2 + O(x^2) \qquad 3.12$$

$$\frac{\sin(k_1 x)}{x} = \frac{1}{x}[k_1 x + O(x^3)] = k_1 + O(x^2) \qquad 3.13$$

$$\frac{\cos(k_2 x)}{x} = \frac{1}{x}[1 + O(x^2)] = \frac{1}{x} + O(x) \qquad 3.14$$

$$\frac{\cos(k_1 x)}{x} = \frac{1}{x}[1 + O(x^2)] = \frac{1}{x} + O(x) \qquad 3.15$$

Ma allora:

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin(k_2 x)}{x} - \frac{\sin(k_1 x)}{x} \right) = \lim_{x \to 0}\left(k_2 - k_1 + O(x^2) \right) = k_2 - k_1 \qquad 3.16$$

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{\cos(k_2 x)}{x} - \frac{\cos(k_1 x)}{x} \right) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x} + O(x) \right) = \lim_{x \to 0}\left(O(x) \right) = 0 \qquad 3.17$$

Ciò dimostra la 3.9 e la possibilità di utilizzare la 3.7 per rappresentare l'integrale a primo membro della 3.6 qualunque sia il valore di x. Si noti la 3.9 implica la continuità dell'integrale considerato in

$x=0$. Infatti, l'integrale esiste in $x=0$ ed in tale punto vale k_2-k_1.

Avvalendosi della 3.7, dalla 3.4 si ottiene:

$$\int_{-e}^{+e} F(k)e^{ixk}dk \simeq \sum_{n=-N}^{N-1} F\left(\frac{2n+1}{2}\Delta k\right)\left[\frac{\sin[(n+1)\Delta k x]}{x}-\frac{\sin[n\Delta k x]}{x}\right] -$$

$$- i\sum_{n=-N}^{N-1} F\left(\frac{2n+1}{2}\Delta k\right)\left[\frac{\cos[(n+1)\Delta k x]}{x}-\frac{\cos[n\Delta k x]}{x}\right] \qquad 3.18$$

Utilizzano poi le proprietà di simmetria della funzione seno e coseno (il seno è una funzione dispari ed il coseno è una funzione pari) dopo alcuni passaggi, la 3.18 si può riscrivere nella forma seguente, più comoda per i nostri fini:

$$\int_{-e}^{+e} F(k)e^{ixk}dk \simeq \sum_{h=1}^{N} a_h \frac{\sin[h\Delta k x]}{x} + i\sum_{h=1}^{N} b_h\left[\frac{\cos[h\Delta k x]}{x}-\frac{\cos[(h-1)\Delta k x]}{x}\right] \qquad 3.19$$

dove si è posto:

$$a_h = F\left(\frac{2h-1}{2}\Delta k\right)+F\left(\frac{1-2h}{2}\Delta k\right)-F\left(\frac{2h+1}{2}\Delta k\right)-F\left(-\frac{2h+1}{2}\Delta k\right) \qquad 3.20$$

$$b_h = F\left(\frac{2h-1}{2}\Delta k\right)-F\left(\frac{1-2h}{2}\Delta k\right) \qquad 3.21$$

(h = 1, 2, …, N). Chiaramente, poiché la funzione $F(k)$ è per ipotesi nulla per $|k|>e$, il coefficiente a_N risulta in pratica il seguente:

$$a_N = F\left(\frac{2N-1}{2}\Delta k\right)+F\left(\frac{1-2N}{2}\Delta k\right) \qquad 3.22$$

E' evidente poi, per quanto precedentemente dimostrato, che la 3.19 definisce una approssimazione dell'integrale a primo membro definita e continua per ogni valore reale di x.

Ricordando la 3.1 ed avvalendoci della 3.2, possiamo quindi concludere che quando la funzione $F(k)$ è apprezzabilmente non nulla solo nell'intervallo $[-e, e]$, allora la funzione $f(x)$ può assumersi rappresentata per ogni valore reale di x dalla seguente relazione, tanto più vera quanto più N è elevato:

$$f(x) \simeq \sum_{h=1}^{N} a_h \frac{\sin[(h/N)e x]}{x} + i\sum_{h=1}^{N} b_h\left[\frac{\cos[(h/N)e x]}{x}-\frac{\cos[((h-1)/N)e x]}{x}\right] \qquad 3.23$$

dove:

$$a_h = F\left(\frac{2h-1}{2N}e\right) + F\left(\frac{1-2h}{2N}e\right) - F\left(\frac{2h+1}{2N}e\right) - F\left(-\frac{2h+1}{2N}e\right) \qquad 3.24$$

$$b_h = F\left(\frac{2h-1}{2N}e\right) - F\left(\frac{1-2h}{2N}e\right) \qquad 3.25$$

(h = 1, 2, …, N). Ovviamente, si ha:

$$a_N = F\left(\frac{2N-1}{2N}e\right) + F\left(\frac{1-2N}{2N}e\right) \qquad 3.26$$

in quanto per ipotesi $F(k)=0$ per $|k|>e$.

Come è naturale la funzione a secondo membro della 3.23 soddisfa a quella che abbiamo definito "Proprietà 1" della funzione $f(x)$. Infatti, la parte reale è una funzione pari e quella immaginaria è una funzione dispari. Inoltre, se $F(k)$ è una funzione pari allora la funzione è reale in quanto sono nulli tutti i coefficienti b_h, mentre se $F(k)$ è una funzione dispari allora la funzione è immaginaria in quanto sono nulli tutti i coefficienti a_h. Mostriamo ora che la funzione a secondo membro della 3.23 soddisfa anche a quella che abbiamo definito "Proprietà 2" della funzione $f(x)$, cosicché, in forza della 3.23, tale proprietà risulterà dimostrata anche per la funzione $f(x)$ stessa. A tale scopo poniamo per semplicità formale:

$$\tilde{f}_R(x) = \sum_{h=1}^{N} a_h \sin[hx] \qquad 3.27$$

$$\tilde{f}_C(x) = \sum_{h=1}^{N} b_h \left(\cos[hx] - \cos[(h-1)x]\right) \qquad 3.28$$

e scriviamo quindi la 3.23 nella forma seguente:

$$f(x) \simeq \frac{1}{x}\tilde{f}_R(ex/N) + i\frac{1}{x}\tilde{f}_C(ex/N) \qquad 3.29$$

Si ha allora:

$$\mathrm{Re}[f(x)] \simeq \frac{1}{x}\tilde{f}_R(ex/N) \qquad 3.30$$

$$\mathrm{Im}[f(x)] \simeq \frac{1}{x}\tilde{f}_C(ex/N) \qquad 3.31$$

Le funzioni $\tilde{f}_R(ex/N)$ ed $\tilde{f}_C(ex/N)$ sono entrambe limitate e periodiche di periodo $2p\,N/e$. Inoltre $\tilde{f}_R(ex/N)$ è una funzione dispari mentre $\tilde{f}_C(ex/N)$ è una funzione pari. Il diagramma tipo di queste funzioni per $x \geq 0$ è mostrato rispettivamente in Figura 3.2 e Figura 3.3, dove è anche evidenziato l'intervallo assunto come fondamentale: $[0, 2p\,N/e[$ per entrambe le funzioni.

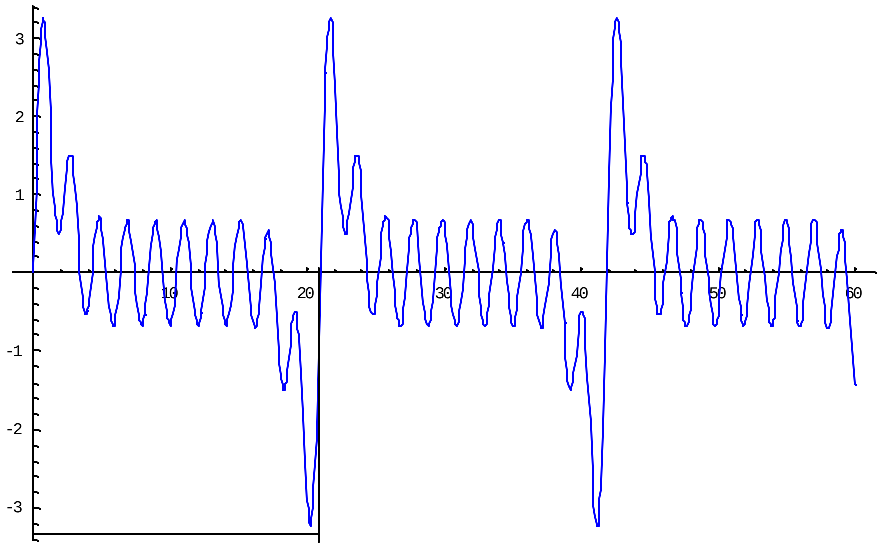

Figura 3.2 Diagramma tipo della funzione $\tilde{f}_R(e\,x/\,N)$

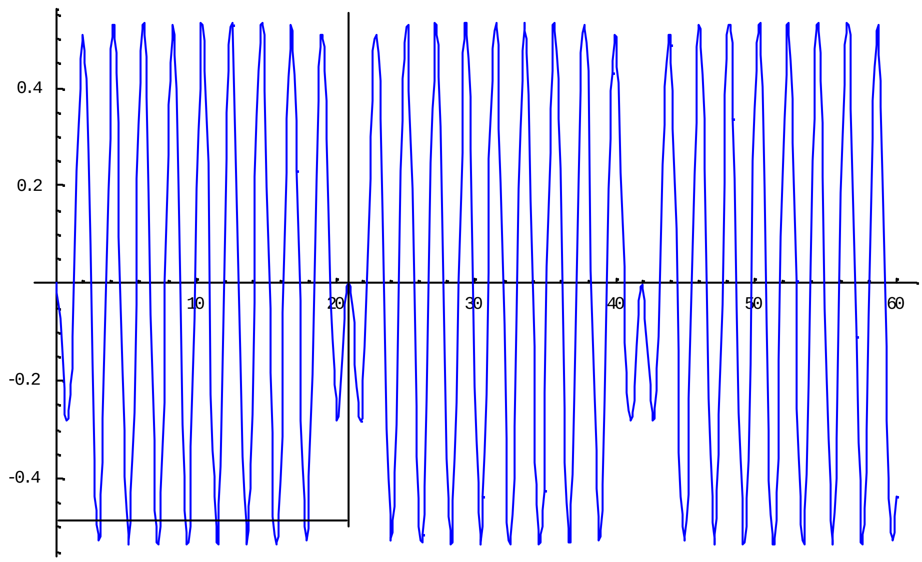

Figura 3.3 Diagramma tipo della funzione $\tilde{f}_C(e\,x/\,N)$

Chiaramente, all'aumentare di N aumenta l'ampiezza dell'intervallo fondamentale e cresce il numero di zeri che le funzioni presentano in tale intervallo. Conseguentemente aumenta anche il numero di estremi relativi che le funzioni presentano nell'intervallo $[0, 2p\,N/e[$. Poiché quando $N \to \infty$, $\tilde{f}_R(e\,x/\,N)/\,x \to \mathrm{Re}[\,f(\,x)]$, possiamo dire che se N è sufficientemente grande, cioè per $N > \tilde{N}_R$, $\tilde{N}_R >> 1$, gli zeri e gli estremi relativi di $\tilde{f}_R(e\,x/\,N)$ contenuti nell'intervallo fondamentale cadranno approssimativamente tutti negli stessi punti x_R^i qualunque sia il valore di N, purché x sia minore di un determinato valore $\tilde{x}_R$. Analogamente, poiché quando $N \to \infty$, $\tilde{f}_C(e\,x/\,N)/\,x \to \mathrm{Im}[\,f(\,x)]$, possiamo dire che se N è sufficientemente grande, cioè per $N > \tilde{N}_C$, $\tilde{N}_C >> 1$, gli zeri e gli estremi relativi di $\tilde{f}_C(e\,x\,/\,N)$ contenuti nell'intervallo fondamentale della funzione cadranno approssimativamente tutti negli stessi punti x_C^j qualunque sia il valore di N, purché x sia minore di un determinato valore $\tilde{x}_C$. E' evidente che $\tilde{x}_R, \tilde{x}_C \to \infty$ quando $N \to \infty$. Per ogni valore fissato di N, i punti x_R^i e

x_C^j sono manifestamente determinati da una relazione del tipo seguente:

$$\frac{e}{N} x_R^i = y_R(a_h, N) \quad 3.32$$

$$\frac{e}{N} x_C^j = y_C(b_h, N) \quad 3.33$$

dove $y_R(a_h, N)$ ed $y_C(b_h, N)$ sono funzione note. Tuttavia, per quanto sopra osservato, se $N > \tilde{N}_R$ il prodotto $y_R(a_h, N)\, N$ risulterà praticamente indipendente da N, ed analogamente, se $N > \tilde{N}_C$ il prodotto $y_C(b_h, N)\, N$ risulterà praticamente indipendente da N. Possiamo quindi concludere che se N è sufficientemente grande e precisamente se:

$$N > \mathrm{Max}\left\{\tilde{N}_R, \tilde{N}_C\right\} \quad 3.34$$

i prodotti $e\, x_R^i$ ed $e\, x_C^j$ soddisfano entrambi ad una relazione della forma seguente:

$$e\, x_R^i = \tilde{y}_R(a_h) \quad 3.35$$

$$e\, x_C^j = \tilde{y}_C(b_h) \quad 3.36$$

Le 3.35 e 3.36 valgono ovviamente per $x < \tilde{x}$ dove $\tilde{x} = \min\left\{\tilde{x}_R, \tilde{x}_C\right\}$, ma se N è molto grande anche $\tilde{x}$ è grande in quanto $\tilde{x} \to \infty$ per $N \to \infty$. Come si vede dunque, nelle ipotesi considerate i prodotti $e\, x_R^i$ ed $e\, x_C^j$ assumono un valore che dipende unicamente dalla funzione $F(k)$. La situazione ora descritta è mostrata in Figura 3.4 nel caso della funzione $\tilde{f}_R(e\, x / N)$ ed in Figura 3.5 nel caso della funzione $\tilde{f}_C(e\, x / N)$.

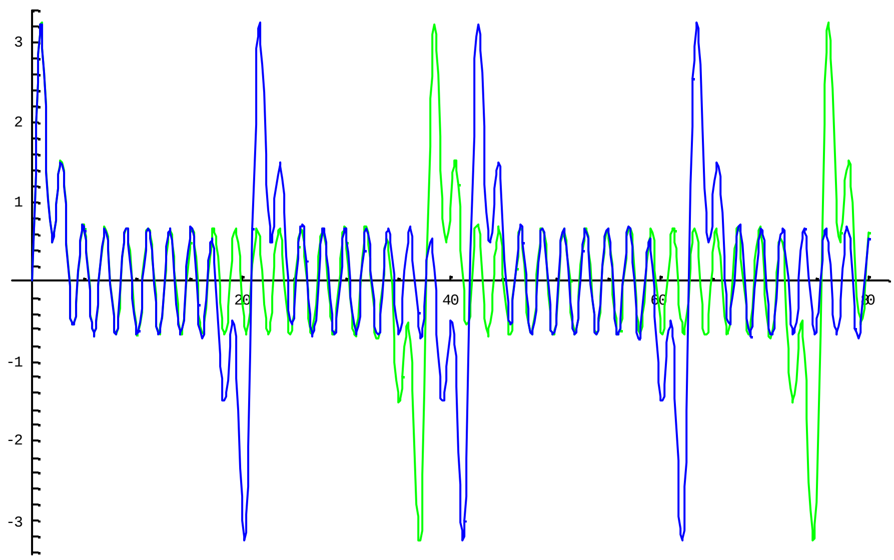

Figura 3.4 Caratterizzazione degli zeri della funzione $\tilde{f}_R(e\, x / N)$ per N grande

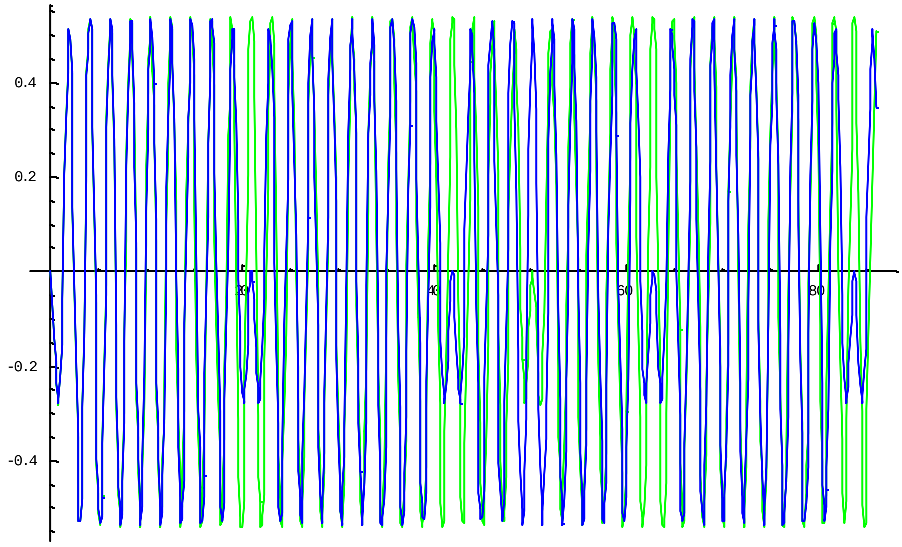

Figura 3.5 Caratterizzazione degli zeri della funzione $\tilde{f}_C(e\,x/N)$ per N grande

Poiché $\tilde{f}_R(e\,x/N)$ ed $\tilde{f}_C(e\,x/N)$ sono funzioni periodiche limitate, le funzioni $\tilde{f}_R(e\,x/N)/x$ e $\tilde{f}_C(e\,x/N)/x$ sono entrambe oscillatorie smorzate che si annullano per $x \to \pm\infty$. Esse sono definite e continue per ogni valore di x ed in particolare nel punto $x = 0$ risulta:

$$\left.\frac{\tilde{f}_R(e\,x/N)}{x}\right|_{x=0} = \frac{e}{N}\sum_{h=1}^{N} a_h h \qquad ; \qquad \left.\frac{\tilde{f}_C(e\,x/N)}{x}\right|_{x=0} = 0 \qquad 3.37$$

La funzione $\tilde{f}_R(e\,x/N)/x$ è pari mentre la funzione $\tilde{f}_C(e\,x/N)/x$ è dispari. Il loro diagramma tipo è come quello mostrato rispettivamente in Figura 3.6 e Figura 3.7 (che si riferisce al caso in cui $\tilde{f}_R(e\,x/N)$ ed $\tilde{f}_C(e\,x/N)$ sono le funzioni il cui diagramma è riportato in Figura 3.2 e Figura 3.3).

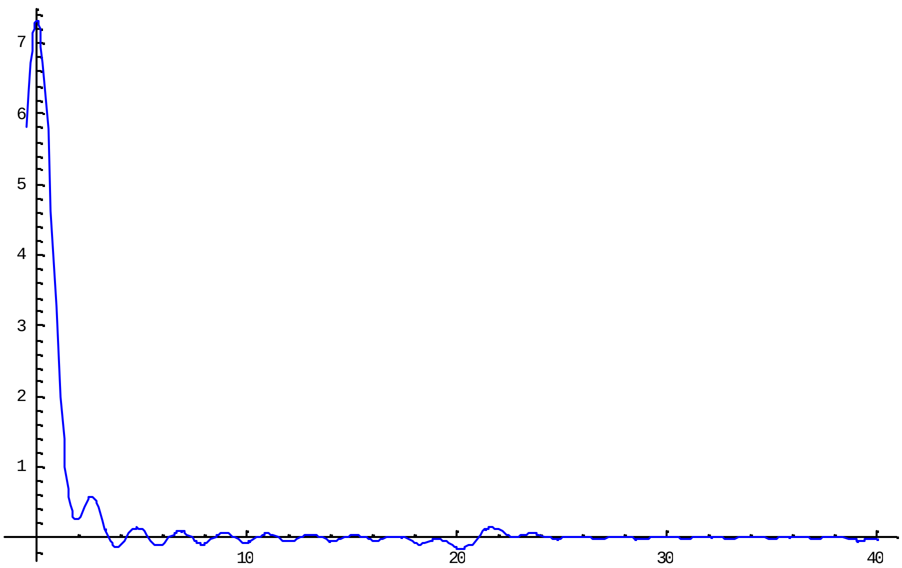

Figura 3.6 Diagramma tipo della funzione $\tilde{f}_R(e\,x/N)/x$

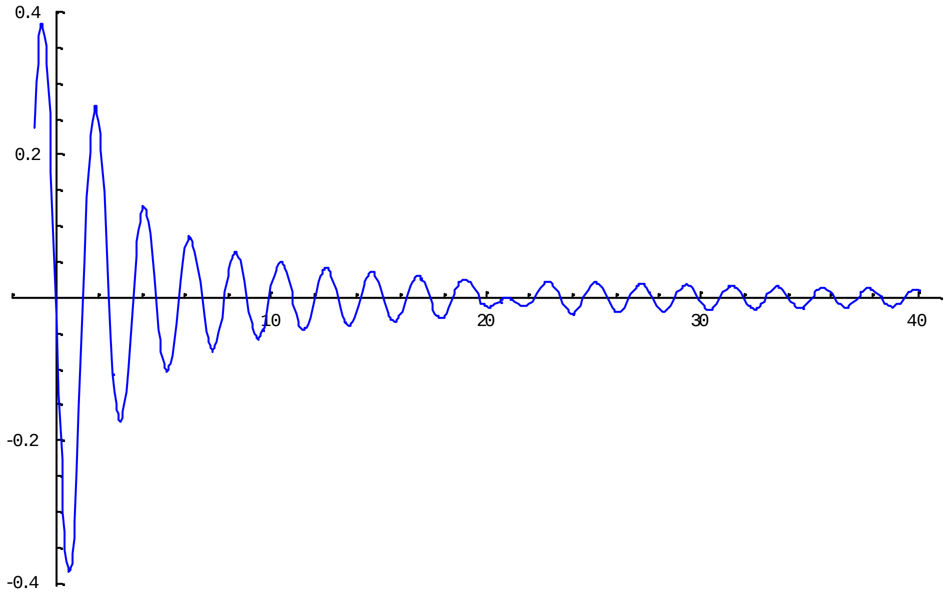

Figura 3.7 Diagramma tipo della funzione $\tilde{f}_C(e\,x/\,N)/\,x$

Poiché le funzioni $\tilde{f}_R(e\,x/\,N)/\,x$ e $\tilde{f}_C(e\,x/\,N)/\,x$, la prima delle quali è pari e la seconda è dispari, sono oscillatorie smorzate e si annullano quando $x \to \pm\infty$, possiamo certamente considerarle non nulle solo in un opportuno intervallo di centro $x = 0$, cioè rispettivamente per $x \in [-\bar{x}_R, \bar{x}_R]$ ed $x \in [-\bar{x}_C, \bar{x}_C]$ con $\bar{x}_R$ ed $\bar{x}_C$ valori opportuni. E' evidente poi che se N è sufficientemente grande i punti $\bar{x}_R$ ed $\bar{x}_C$ cadranno certamente nell'intervallo fondamentale delle funzioni $\tilde{f}_R(e\,x/\,N)$ ed $\tilde{f}_C(e\,x/\,N)$, cioè in $[0, 2p\,N/\,e[$. Indichiamo con $\tilde{G}_R(x;e,N)$ e con $\tilde{g}_R(x;e,N)$ le funzioni che per un valore di N fissato interpolano in $[0, 2p\,N/\,e[$ rispettivamente i massimi ed i minimi relativi di $\tilde{f}_R(e\,x/\,N)$ ed analogamente indichiamo con $\tilde{G}_C(x;e,N)$ e con $\tilde{g}_C(x;e,N)$ le funzioni che per un valore di N fissato interpolano in $[0, 2p\,N/\,e[$ rispettivamente i massimi ed i minimi relativi di $\tilde{f}_C(e\,x/\,N)$. Sia quindi:

$$\hat{f}_R = \mathrm{Max}\left\{\left|\frac{f_R(e\,x/\,N)}{x}\right|,\ x \in [0, 2p\,N/\,e[\right\} \tag{3.38}$$

ed:

$$\hat{f}_C = \mathrm{Max}\left\{\left|\frac{f_C(e\,x/\,N)}{x}\right|,\ x \in [0, 2p\,N/\,e[\right\} \tag{3.39}$$

Allora se N è sufficientemente grande, i valori di $\bar{x}_R$ ed $\bar{x}_C$ potranno essere stimati imponendo rispettivamente che per $|x| > \bar{x}_R$ ed $|x| > \bar{x}_C$ le oscillazioni di $\tilde{f}_R(e\,x/\,N)/\,x$ ed $\tilde{f}_C(e\,x/\,N)/\,x$ siano inferiori a C volte ($C \ll 1$ scelto convenzionalmente) il valore di $\hat{f}_R$ ovvero $\hat{f}_C$. Adottando questo criterio, è chiaro che $\bar{x}_R$ dovrà coincidere con una soluzione delle seguenti due equazioni algebriche, considerate separatamente:

$$\left|\frac{\tilde{G}_R(x;e,N)}{x}\right| = \mathrm{C}\,\widehat{f}_R \qquad ; \qquad \left|\frac{\tilde{g}_R(x;e,N)}{x}\right| = \mathrm{C}\,\widehat{f}_R \tag{3.40}$$

Analogamente, $\overline{x}_C$ dovrà coincidere con una soluzione delle seguenti due equazioni algebriche, considerate separatamente:

$$\left|\frac{\tilde{G}_C(x;e,N)}{x}\right| = \mathrm{C}\,\widehat{f}_C \qquad ; \qquad \left|\frac{\tilde{g}_C(x;e,N)}{x}\right| = \mathrm{C}\,\widehat{f}_C \tag{3.41}$$

Poiché se N è sufficientemente grande in virtù delle 3.35 e 3.36, gli estremi di $\tilde{f}_R(e\,x/N)/x$ ed $\tilde{f}_C(e\,x/N)/x$ non dipendono da N, possiamo concludere che in forza di quanto ora detto, risulterà senz'altro:

$$\overline{x}_R = j_R(e,\mathrm{C}) \tag{3.42}$$

ed analogamente:

$$\overline{x}_C = j_C(e,\mathrm{C}) \tag{3.43}$$

dove $j_R(e,\mathrm{C})$ e $j_R(e,\mathrm{C})$ sono funzioni che dipendono unicamente da $F(k)$. Esiste quindi una diretta relazione che lega $\overline{x}_R$ ed $\overline{x}_C$ ad e.

Supponiamo per fissare le idee che $\overline{x}_R$ sia la soluzione della prima delle 3.36. Allora possiamo scrivere:

$$\widehat{f}_R\,\overline{x}_R = \frac{\left|\tilde{G}_R(\overline{x}_R;e,N)\right|}{\mathrm{C}} \tag{3.44}$$

Ma $\widehat{f}_R$ è un valore manifestamente dipendente da e e quindi, tenendo conto che $\widehat{f}_R$ deve annullarsi per $e \to 0$, possiamo scrivere:

$$\widehat{f}_R = e\; f(e) \tag{3.45}$$

dove $f(e)$ è una funzione continua positiva la cui forma dipende unicamente dalla funzione $F(k)$. Avvalendoci della 3.45, scriviamo quindi la 3.44 nel modo seguente:

$$\overline{x}_R\,e = \frac{1}{\mathrm{C}}\frac{\left|\tilde{G}_R(\overline{x}_R;e,N)\right|}{f(e)} \tag{3.46}$$

E' chiaro allora, essendo $\tilde{G}_R(x;e,N)$ una funzione comunque limitata, che esisterà una costante m_R il cui valore dipende unicamente dalla funzione $F(k)$, in corrispondenza della quale risulta:

$$\overline{x}_R\,e \geq m_R \tag{3.47}$$

Una conclusione identica si avrebbe ovviamente se $\overline{x}_R$ fosse la soluzione della seconda delle 3.41. Procedendo in modo analogo, è facile poi rendersi conto che esisterà anche una costante m_C il cui valore dipende unicamente dalla funzione $F(k)$, in corrispondenza della quale risulta:

$$\overline{x}_C e \geq m_C \tag{3.48}$$

Siamo ora finalmente in grado di procedere alla dimostrazione della "Proprietà 2" della funzione $f(x)$. Infatti, per le 3.30 e 3.31 le proprietà di $\mathrm{Re}[f(x)]$ ed $\mathrm{Im}[f(x)]$ coincidono per N sufficientemente grande, con le proprietà delle funzioni $\tilde{f}_R(ex/N)/x$ ed $\tilde{f}_C(ex/N)/x$ e quindi è possibile utilizzare i risultati precedentemente ottenuti. Si ha allora immediatamente che $\mathrm{Re}[f(x)]$ ed $\mathrm{Im}[f(x)]$ sono entrambe delle funzioni oscillatorie smorzate che si possono effettivamente considerare non nulle solo per x in un opportuno intervallo di centro $x=0$, e precisamente per $x \in [-\overline{x}_R, \overline{x}_R]$ nel caso $\mathrm{Re}[f(x)]$ e per $x \in [-\overline{x}_C, \overline{x}_C]$ nel caso di $\mathrm{Im}[f(x)]$, dove $\overline{x}_R$ ed $\overline{x}_C$ sono valori stimabili con le 3.42 e 3.43 una volta fissato convenzionalmente C. Ma allora la funzione $f(x)$ potrà effettivamente considerarsi non nulla solo per $x \in [-\overline{x}, \overline{x}]$ dove:

$$\overline{x} = \mathrm{Max}\left\{\overline{x}_R, \overline{x}_C\right\} \tag{3.49}$$

La prima parte della "Proprietà 2" è quindi verificata. Per completare la verifica della "Proprietà 2" occorre ora provare la diseguaglianza 1.2. Ma questo è immediato. Infatti il punto $\overline{x}$ soddisferà certamente alla condizione 3.47 o 3.48 e quindi esisterà senz'altro una costante m il cui valore dipende unicamente dalla funzione $F(k)$, tale che:

$$\overline{x} e \geq m \tag{3.50}$$

Ciò completa la verifica della "Proprietà 2" della funzione $f(x)$.

4. ALCUNI ESEMPI CONCRETI

<u>Esempio 1</u>

Sia:

$$F(k) = 1 \tag{4.1}$$

Allora si ha:

$$f(x) = d(x) \tag{4.2}$$

dove $d(x)$ è la funzione delta di Dirac. Per definizione infatti:

$$d(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixk} dk \tag{4.3}$$

Si noti che nel caso in esame si può assumere che sia $e = \infty$. Conformemente alla 1.2 risulta quindi $\overline{x} = 0$.

Esempio 2

Sia:

$$F(k) = d(k) \qquad 4.4$$

dove $d(x)$ è la funzione delta di Dirac. Allora si ha:

$$f(x) = 1 \qquad 4.5$$

Infatti:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d(k) e^{ixk} dk \; = \; e^{ix0} \; = \; 1 \qquad 4.6$$

Si noti che nel caso in esame si può assumere che sia $e = 0$. Conformemente alla 1.2 risulta quindi $\overline{x} = \infty$.

Esempio 3

Sia:

$$F(k) = e^{-a k^2} \qquad 4.7$$

dove a è una costante positiva. Allora si ha:

$$f(x) = \sqrt{\frac{p}{a}} \; e^{-\frac{x^2}{4a}} \qquad 4.8$$

Per dimostrare la 4.8 osserviamo innanzitutto che essendo $F(k)$ una funzione pari, risulta:

$$f(x) = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a k^2} e^{ixk} dk \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a k^2} \cos(xk) dk \; = \; 2 \int_{0}^{+\infty} e^{-a k^2} \cos(xk) \, dk \qquad 4.9$$

Il calcolo della funzione $f(x)$ è quindi ricondotto a quello dell’integrale:

$$I(x) = \int_{0}^{+\infty} e^{-a k^2} \cos(xk) \, dk \qquad 4.10$$

Calcolando la derivata di $I(x)$ si ottiene:

$$\frac{d}{dx} I(x) = -\int_{0}^{+\infty} e^{-a k^2} k \sin(xk) \, dk \qquad 4.10$$

ed integrando per parti l’integrarle a secondo della 4.10 risulta:

$$\int_0^{+\infty} \left(e^{-a\,k^2} k\right) \sin(xk)\, d\,k \quad = \left[-\frac{1}{2a} e^{-a\,k^2} \sin(xk)\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2a} e^{-a\,k^2}\right)\left(x\cos(xk)\right) d\,k \quad =$$

$$= \frac{x}{2a} \int_0^{+\infty} e^{-a\,k^2} \cos(xk)\, d\,k \quad = \frac{x}{2a} I\,(x) \qquad 4.11$$

Possiamo quindi concludere che l'integrale $I\,(x)$ soddisfa alla seguente equazione differenziale:

$$\frac{d}{d\,x} I\,(x) = -\frac{x}{2a} I\,(x) \qquad 4.12$$

Integrando la 4.12 si trova:

$$I\,(x) = K\,e^{-\frac{x^2}{4\,a}} \qquad 4.13$$

dove K è una costante arbitraria. Ma:

$$K = I(0) \qquad 4.14$$

e quindi deve essere:

$$K = \int_0^{+\infty} e^{-a\,k^2} d\,k \qquad 4.15$$

Eseguendo nell'integrale a secondo membro della 4.15 il cambiamento di variabile:

$$k = \sqrt{\frac{t}{a}} \qquad 4.16$$

risulta:

$$\int_0^{+\infty} e^{-a\,k^2} d\,k \quad = \frac{1}{2\sqrt{a}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} d\,t \qquad 4.17$$

Ma per definizione:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} d\,t \quad = G\,(1/2) \qquad 4.18$$

e, come è noto:

$$G\,(1/2) = \sqrt{p} \qquad 4.19$$

Dunque:

$$K = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{a}} \qquad 4.20$$

Si ha quindi in definitiva:

$$I(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{a}}\, e^{-\frac{x^2}{4a}} \qquad 4.21$$

e per la 4.9, la 4.8 è dimostrata.

Nel caso in esame la funzione $F(k)$ si può chiaramente considerare apprezzabilmente non nulla solo in un opportuno intervallo $[-e,\ e]$. Tenendo presente che $F(k)$ è una funzione monotona decrescente, l'ampiezza di questo intervallo cioè il valore di e, può allora essere fissata convenzionalmente assumendo che $F(k)$ sia pressoché nulla quando il suo valore in corrispondenza di e sia C volte ($\mathrm{C} << 1$ opportunamente fissato) il valore massimo della funzione stessa (che si trova in $k = 0$ ed è pari ad 1). Così facendo risulta allora che fra a ed e deve sussistere la seguente relazione:

$$a = \frac{|\ln(\mathrm{C})|}{e^2} \qquad 4.22$$

Avvalendosi della 4.22, la 4.8 fornisce:

$$f(x) = \sqrt{\frac{p}{|\ln(\mathrm{C})|}}\; e^2 e^{-\frac{(e\,x)^2}{4|\ln(\mathrm{C})|}} \qquad 4.23$$

Dunque, supponendo che $f(x)$ si possa considerare nulla quando, al pari di $F(k)$, il suo valore è C volte il valore massimo della funzione stessa, risulta che nel caso in esame:

$$\bar{x}e = 2|\ln(\mathrm{C})| \qquad 4.24$$

La relazione ora ottenuta rappresenta la 3.42 per il caso in esame. Si ha:

$$j_R(e,\mathrm{C}) = \frac{2|\ln(\mathrm{C})|}{e} \qquad 4.25$$

Ciò significa che per la funzione $F(k)$ ora considerata quando N è sufficientemente grande i massimi e i minimi relativi di $\tilde{f}_R(e\,x/N)$ assumono in $[0, 2p\,N/e[$ un valore costante (per x non è troppo vicino ad $x = 0$). In Figura 4.1 sono mostrati, sovrapposti, i grafici di $F(k)$ ed $f(x)$ nel caso $e = 5$. La funzione $F(k)$ è riportata in blu e la funzione $f(x)$ è riportata in rosso. Assumendo $\mathrm{C} = 0.01$, si ha, conformemente alla 4.24, $\bar{x} = 1.842$. In Figura 4.2 è riportato invece, per $N = 40$ ed $x > 0$, il grafico di $\tilde{f}_R(e\,x/N)$ nel il caso in esame, in modo da evidenziare quanto sopra si è detto riguardo agli estremi di tale funzione.

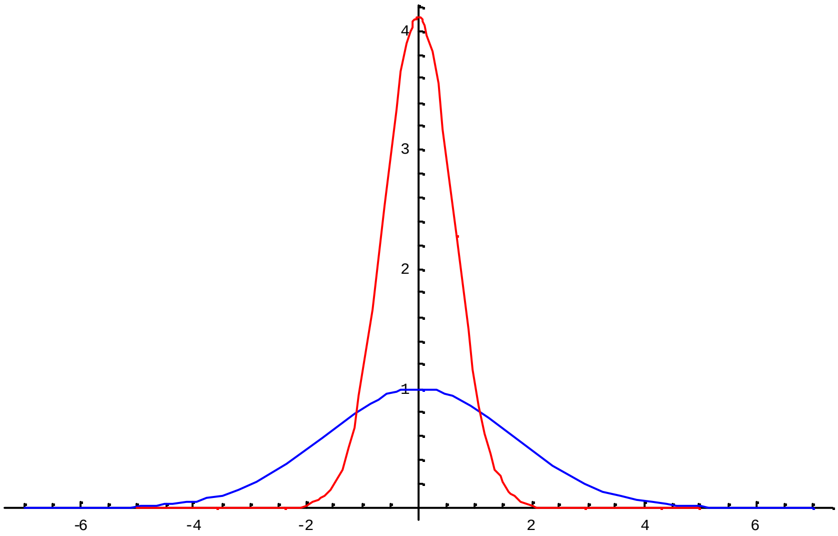

Figura 4.1

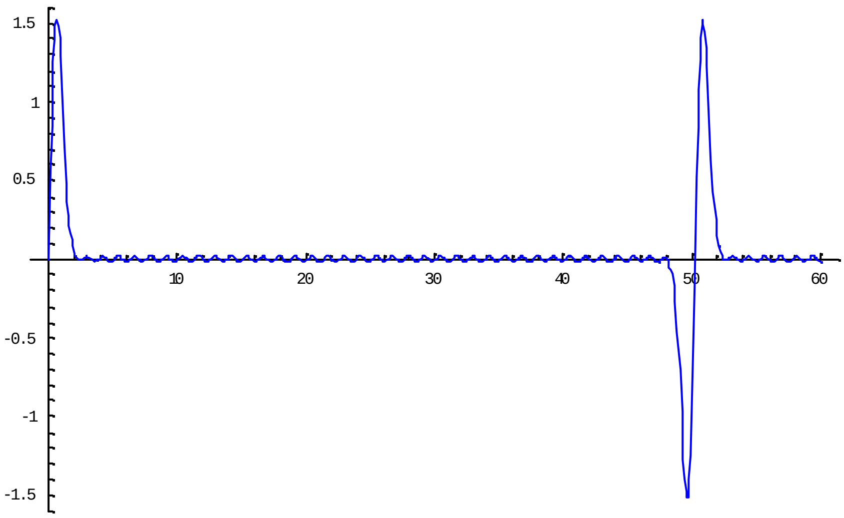

Figura 4.2

Esempio 4

Sia:

$$F(k)=\begin{cases}1 & \text{se } |k|\le e\\ 0 & \text{se } |k|>e\end{cases} \qquad 4.26$$

Allora si ha:

$$f(x)=2\frac{\sin(xe)}{x} \qquad 4.27$$

Infatti, la funzione $F(k)$ è pari, quindi:

$$f(x) = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(k) e^{ixk} dk \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\cos(xk)\, dk \;=\; \int_{-e}^{+e} \cos(xk)\, dk \;= 2\int_{0}^{+e} \cos(xk)\, dk \qquad 4.28$$

e, come si ottiene immediatamente eseguendo nell'ultimo integrale della 4.28 la sostituzione:

$$xk = t\,, \qquad 4.29$$

risulta:

$$\int_{0}^{e} \cos(xk)\, dk \;=\; \left[\frac{\sin(xk)}{x} \right]_{0}^{e} = \frac{\sin(xe)}{x} \qquad 4.30$$

La funzione $f(x)$ si può chiaramente considerare apprezzabilmente non nulla solo in un opportuno intervallo $[-\overline{x}, \overline{x}]$. L'ampiezza di questo intervallo, cioè il valore di $\overline{x}$, può essere stabilita utilizzando la tecnica illustrata nel Paragrafo 3. Nel caso in esame si ha chiaramente se $|x| \geq \frac{5p}{2e}$:

$$-\frac{2}{x} \leq f(x) \leq \frac{2}{x} \qquad 4.31$$

quindi, poiché nel caso in esame il valore massimo assoluto di $f(x)$ è in $x = 0$ e vale $2e$, il valore di $\overline{x}$ si ottiene imponendo:

$$\frac{2}{x} = \mathrm{C}2e \qquad 4.32$$

dove $\mathrm{C} << 1$ è fissato convenzionalmente. Si ha quindi:

$$\overline{x}e = \frac{1}{\mathrm{C}} \qquad 4.33$$

La relazione ora ottenuta rappresenta la 3.42 per il caso in esame. Si ha:

$$j_R(e, \mathrm{C}) = \frac{1}{\mathrm{C}e} \qquad 4.34$$

Infatti per la funzione $F(k)$ ora considerata i massimi e i minimi relativi di $\tilde{f}_R(ex/N)$, che si identifica con $2\sin(xe)$, assumono sempre un valore costante. In Figura 4.3 sono mostrati, sovrapposti, i grafici di $F(k)$ ed $f(x)$ nel caso $e = 5$. La funzione $F(k)$ è riportata in blu e la funzione $f(x)$ è riportata in rosso. Assumendo $\mathrm{C} = 0.01$, si ha, conformemente alla 4.33, $\overline{x} = 20$. In Figura 4.4 è invece illustrata la limitazione 4.31 per quanto riguarda i massimi relativi di $f(x)$ in $x > 0$.

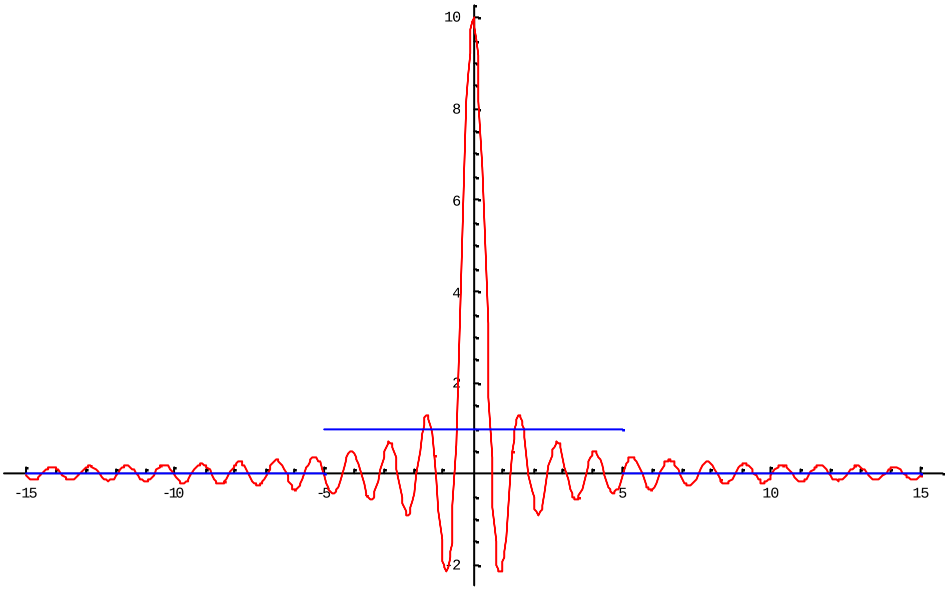

Figura 4.3

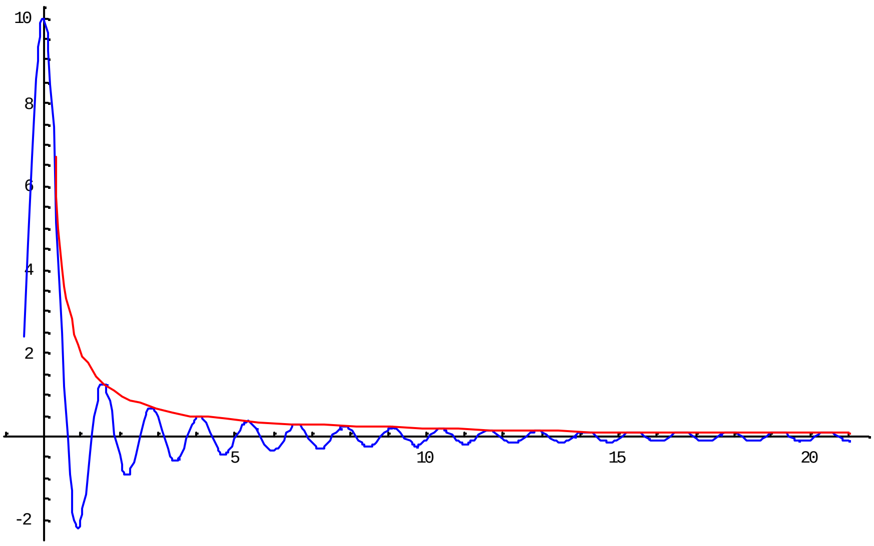

Figura 4.4

Esempio 5

Sia:

$$F(k) = \begin{cases} \cos k & \text{se } |k| \le e \\ 0 & \text{se } |k| > e \end{cases} \qquad 4.35$$

dove $e = (2n-1)/2p$, $n = 1,2,...$. Allora si ha:

$$f(x) = \frac{\sin[(x-1)e]}{x-1} + \frac{\sin[(x+1)e]}{x+1} \qquad 4.36$$

Infatti, la funzione $F(k)$ è pari quindi:

$$f(x) = \mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(k)e^{ixk}dk\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\cos(xk)\,dk \quad = \int_{-e}^{+e} \cos k \cos(xk)\,dk \quad =$$

$$= 2\int_{0}^{+e} \cos k\,\cos(xk)\,dk \qquad 4.37$$

Ma per note formule trigonometriche:

$$\cos k \cos(xk) = \frac{\cos[(x-1)k] + \cos[(x+1)k]}{2} \qquad 4.38$$

per cui risulta:

$$\int_{0}^{+e} \cos k \cos(xk)\,dk \quad = \int_{0}^{+e} \frac{\cos[(x-1)k] + \cos[(x+1)k]}{2}dk \quad = \frac{1}{2}\int_{0}^{+e} \cos[(x-1)k]dk \quad +$$

$$+\frac{1}{2}\int_{0}^{+e} \cos[(x+1)k]dk \quad = \frac{1}{2}\frac{\sin[(x-1)e]}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{\sin[(x+1)e]}{x+1} \qquad 4.39$$

e la 4.36 è dimostrata.

La funzione $f(x)$ si può chiaramente considerare apprezzabilmente non nulla solo in un opportuno intervallo $[-\bar{x}, \bar{x}]$. L'ampiezza di questo intervallo, cioè il valore di $\bar{x}$, può essere stabilita utilizzando la tecnica illustrata nel Paragrafo 3. Nel caso in esame, essendo per ipotesi $e = (2n-1)/2p$, si ha, se $|x| \geq 1 + \frac{5p}{2e}$:

$$-\frac{2}{x^2-1} \leq f(x) \leq \frac{2}{x^2-1} \qquad 4.40$$

Infatti, per i valori di e considerati gli estremi relativi di $\sin[(x-1)e]$ sono in controfase a quelli di $\sin[(x+1)e]$. Occorre ora fare una distinzione. Se $e \geq 3/2p$ il valore massimo assoluto di $f(x)$ è in $x = \pm 1$ e vale e, quindi il valore di $\bar{x}$ si ottiene imponendo:

$$\frac{2}{x^2-1} = \mathrm{C}e \qquad 4.41$$

dove $\mathrm{C} << 1$ è fissato convenzionalmente. Si ha quindi:

$$\bar{x}e = \sqrt{e^2 + \frac{2e}{\mathrm{C}}} \qquad \Rightarrow \qquad \bar{x}e > \sqrt{\frac{p}{\mathrm{C}}} \qquad 4.42$$

La relazione ora ottenuta rappresenta la 3.42 per il caso in esame. Si ha:

$$j_R(e,\mathrm{C}) = \sqrt{1+\frac{2}{\mathrm{C}e}} \qquad 4.43$$

In Figura 4.5 sono mostrati, sovrapposti, i grafici di $F(k)$ ed $f(x)$ nel caso $e = 5/2p$ ($e = 7.854$). La funzione $F(k)$ è riportata in blu e la funzione $f(x)$ è riportata in rosso. Assumendo $\mathrm{C} = 0.01$, si ha, conformemente alla 4.42, $\bar{x} = 5.144$. In Figura 4.6 è invece illustrata la limitazione 4.40 per quanto riguarda i massimi relativi di $f(x)$ in $x > 0$.

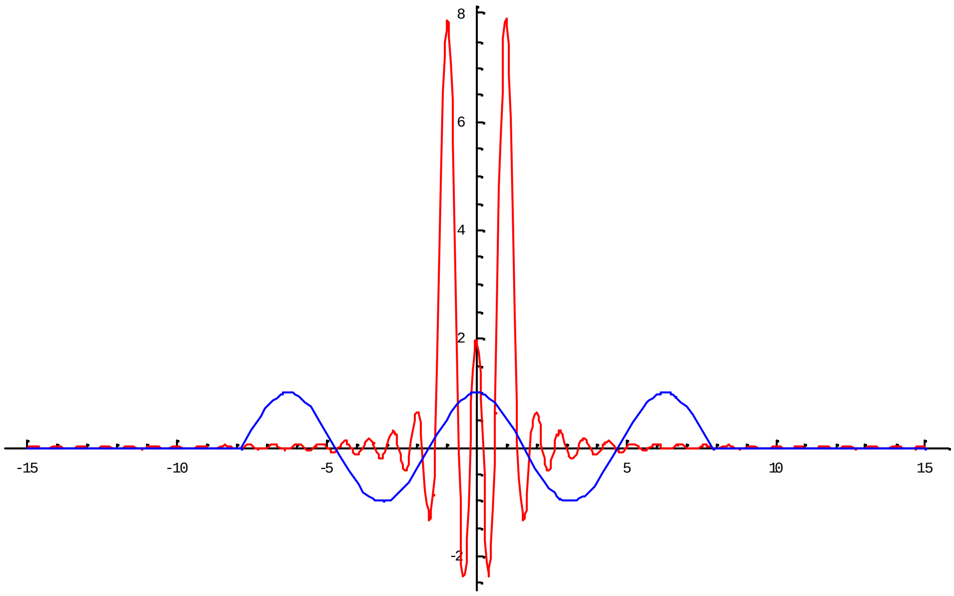

Figura 4.5

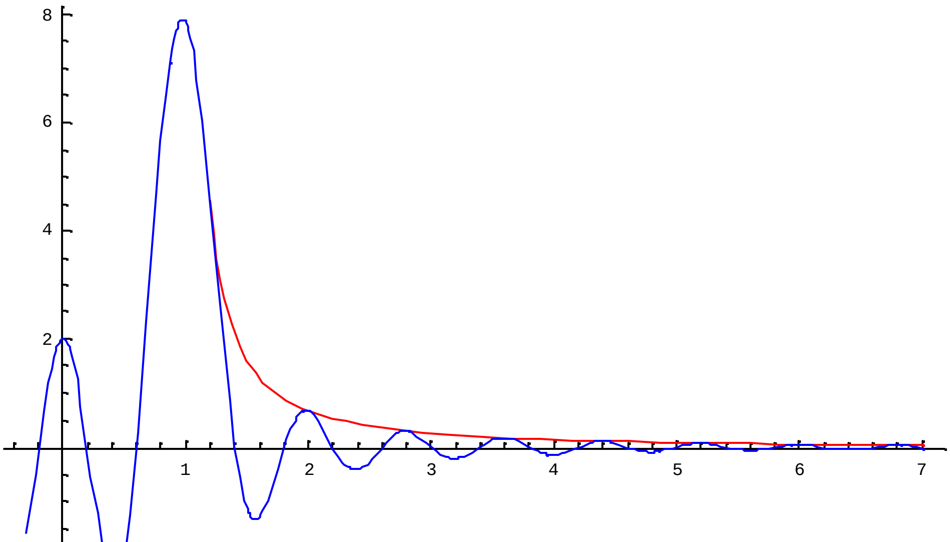

Figura 4.6

Nel caso $e = p/2$ dalla 4.36 si ottiene:

$$f(x) = 2\,\frac{\cos(p\,x/2)}{1 - x^2} \qquad 4.44$$

Quindi nel caso in esame $f(x)$ presenta un solo massimo assoluto in $x = 0$, il cui valore è 2, e dalla 4.40 risulta:

$$\bar{x} = \sqrt{1 + \frac{2}{\mathrm{C}}} \qquad 4.45$$

Perciò assumendo $\mathrm{C} = 0.01$ si ha $\bar{x} = 14.18$. La situazione ora considerata è mostrata nella seguente Figura 4.7.

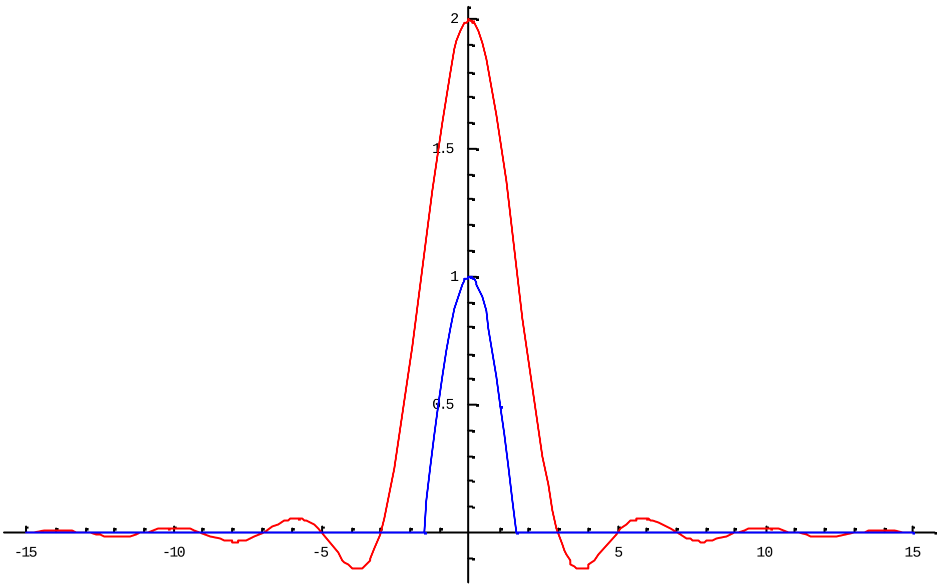

Figura 4.7

APPENDICE 1 Formula di Simpson per la valutazione dell'integrale 1.1 quando la funzione $F(k)$ è non nulla solo nell'intervallo $[\,-e, e\,]$

Se $F(k)$ è nulla per $|k| > e$, una valutazione sufficientemente approssimata della funzione $f(x)$ si può ottenere suddividendo l'intervallo $[0, e]$ in N parti uguali di ampiezza:

$$\Delta k = \frac{e}{N} \qquad \text{A1.1}$$

e quindi rappresentando in ciascun intervallino la funzione $F(k)$ mediante una retta passante per i punti di intersezione di $F(k)$ con le rette ortogonali all'asse k e passanti per i punti estremi dell'intervallino considerato. Così facendo risulta allora:

$$f(x) \simeq \sum_{n=-N}^{N-1} \int_{n\Delta k}^{(n+1)\Delta k} F_n(k)\, e^{ixk}\, dk \qquad \text{A1.2}$$

dove:

$$F_n(k) = a_n k + b_n \qquad \text{A1.3}$$

$$a_n = \frac{F(n\Delta k + \Delta k) - F(n\Delta k)}{\Delta k} \qquad \text{A1.4}$$

$$b_n = -\left[(n+1)[F(n\Delta k + \Delta k) - F(n\Delta k)] - F(n\Delta k + \Delta k)\right] \qquad \text{A1.5}$$

Utilizzano Mathematica® si trova che in generale, comunque siano i valori di k_1, k_2, a e b:

$$\int_{k_1}^{k_2} (ak+b)\, e^{ixk}\, dk = \left(\frac{a}{x^2}[\cos(k_2 x) - \cos(k_1 x)] + (ak_2 + b)\frac{\sin(k_2 x)}{x} - (ak_1 + b)\frac{\sin(k_1 x)}{x} \right) +$$

$$+ i \left(\frac{a}{x^2}[\sin(k_2 x) - \sin(k_1 x)] - (ak_2 + b)\frac{\cos(k_2 x)}{x} + (ak_1 + b)\frac{\cos(k_1 x)}{x} \right) \qquad \text{A1.6}$$

Utilizzando la A1.6 nella A1.2 si perviene allora ad una formula per la stima della funzione $f(x)$ che risulta abbastanza accurata se N è sufficientemente grande. A titolo d'esempio esplicitiamo questa formula per la stima di $f(x)$ nel caso in cui $F(k)$ sia una funzione pari e quindi $f(x)$ risulti reale. Si ha:

$$f(x) \simeq \sum_{n=-N}^{N-1} \left(\frac{\cos[(n+1)\Delta k\, x] - \cos[n\Delta k\, x]}{x^2} \right) a_n + \sum_{n=-N}^{N-1} \frac{\sin[(n+1)\Delta k\, x]}{x} [(n+1)\Delta k\, a_n + b_n] -$$

$$- \sum_{n=-N}^{N-1} \frac{\sin[n\Delta k\, x]}{x} [n\Delta k\, a_n + b_n] \qquad \text{A1.7}$$

dove:

$$a_n = \frac{F(n\Delta k + \Delta k) - F(n\Delta k)}{\Delta k} \qquad \text{A1.8}$$

$$b_n = -\left[(n+1)[F(n\Delta k + \Delta k) - F(n\Delta k)] - F(n\Delta k + \Delta k)\right] \qquad \text{A1.9}$$

ed:

$$\Delta k = \frac{e}{N} \qquad \text{A1.10}$$

APPENDICE 2 Una generalizzazione della rappresentazione integrale di Fourier

Consideriamo la funzione $f_{k_0}(x)$ così definita:

$$f_{k_0}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k-k_0)\, e^{ixk}\, dk \qquad \text{A2.1}$$

dove $F(k)$ è una funzione reale di variabile reale, continua e per la quale si suppone che l'integrale a secondo membro esista in corrispondenza di ogni valore reale di x. Chiaramente, la funzione $f(x)$ definita dalla 1.1 è un caso particolare della funzione $f_{k_0}(x)$. Infatti si ha:

$$f(x) = f_0(x) \qquad \text{A2.2}$$

Dimostriamo ora che fra la funzione $f(x)$ definita dalla 1.1 e la funzione $f_{k_0}(x)$ definita dalla A2.1 sussiste la seguente relazione:

$$f_{k_0}(x) = e^{ixk_0} f(x) \qquad \text{A2.3}$$

Per dimostrare la A2.3, eseguiamo nell'integrale a secondo membro della A2.1 il cambiamento di variabile:

$$k = h + k_0 \qquad \text{A2.4}$$

Allora risulta:

$$f_{k_0}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k-k_0)\, e^{ixk}\, dk = \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{ix(h+k_0)}\, dk = e^{ixk_0} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)\, e^{ixh}\, dk = e^{ixk_0} f(x) \qquad \text{A2.5}$$

La relazione A2.3 è quindi dimostrata. Si noti che la relazione A2.3 risulta particolarmente evidente nel caso in cui si assuma $F(k) = d(k)$ dove $d(x)$ è la funzione delta di Dirac. In questo caso si ha infatti:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d(k)\, e^{ixk}\, dk = 1 \qquad \text{A2.6}$$

$$f_{k_0}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} d(k-k_0)\, e^{ixk}\, dk = e^{ixk_0} \qquad \text{A2.7}$$

BIBLIOGRAFIA GENERALE

[1] M. R. Spiegel, “Analisi Matematica”, Collana Schaum N. 8, ETAS Libri

[2] F. G. Tricomi, “Istituzioni di Analisi Superiore”, Edizioni CEDAM

[3] F. G. Tricomi, “Funzioni Ipergeometriche Confluenti” Edizioni Cremonese

[4] E. De Castro, “Complementi di Analisi Matematica”, Zanichelli

[5] C. Rossetti, “Metodi Matematici per la Fisica”, Levrotto & Bella

[6] E. Persico, “Fondamenti della Meccanica Atomica”, Zanichelli

[7] F. Schedi, “Analisi Numerica”, Collana Schaum N. 14, ETAS Libri

[8] L. Brasca, “Tavole Matematiche”, Ghisetti & Corvi

INDICE GENERALE