M. G. BUSATO

STUDIO DELLE RADICI DI UNA EQUAZIONE ALGEBRICA DI TERZO GRADO A COEFFICIENTI REALI

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

SOMMARIO

In questo scritto viene compiuto lo studio dettagliato delle radici delle equazioni algebriche di terzo grado a coefficienti reali. In particolare, dopo avere illustrato le condizione per le quali l'equazione presenta radici reali o complesse e riportato le formule risolutive, vengono definite delle tabelle mediante le quali è possibile determinare la tipologia delle radici in funzione dei coefficienti della equazione. La tecnica è poi applicata allo studio degli autovalori di una matrice reale 3´3 ed all'analisi della stabilità delle soluzioni di un sistema differenziale lineare reale di tre equazioni.

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

INDICE GENERALE

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

1. RADICI DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE DI TERZO GRADO

Consideriamo l'equazione algebrica a coefficienti reali:

$$x^3 + a x^2 + b x + c = 0 \tag{1.1}$$

e poniamo:

$$P = \frac{-a^2 + 3b}{9} \qquad ; \qquad Q = \frac{-2a^3 + 9ab - 27c}{54} \tag{1.2}$$

Allora, indicata con D la quantità:

$$D = P^3 + Q^2 \tag{1.3}$$

si possono presentare i seguenti casi:[1]

<u>Caso A</u> $D \leq 0$: l'equazione 1.1 possiede allora tre radici reali, e precisamente:

- se $D < 0$ tre radici distinte
- se $D = 0$ e $P \neq 0$ tre radici di cui due coincidenti
- se $D = 0$ e $P = 0$ tre radici tutte coincidenti

<u>Caso B</u> $D > 0$: l'equazione 1.1 possiede allora una radice reale e due radici complesse coniugate.

Le radici x_1, x_2, x_3 della equazione 1.1 si possono ottenere esplicitamente in due forme, una più comoda nel Caso A e l'altra più comoda nel Caso B.

Nel Caso A, cioè quando $D \leq 0$, le radici della equazione 1.1 sono utilmente fornite dalle formule seguenti:

$$x_1 = -\frac{a}{3} + 2\sqrt{-P}\,\cos\frac{j}{3} \tag{1.4}$$

$$x_2 = -\frac{a}{3} - \sqrt{-P}\left[\cos\frac{j}{3} + \sqrt{3}\ \mathrm{sen}\frac{j}{3}\right] \tag{1.5}$$

$$x_3 = -\frac{a}{3} - \sqrt{-P}\left[\cos\frac{j}{3} - \sqrt{3}\ \mathrm{sen}\frac{j}{3}\right] \tag{1.6}$$

dove si è posto:

$$j = \mathrm{arctg}\sqrt{-\frac{P^3 + Q^2}{Q^2}} \tag{1.7}$$

---

1) Si noti che la condizione $D \leq 0$ implica $P \leq 0$ e i conseguenza $a^2 \geq 3b$. Si noti anche che tre radici reali coincidenti si presentano quando è simultaneamente $P = 0$ e $Q = 0$.

Nel Caso B, cioè quando $D > 0$, le radici della equazione 1.1 sono invece utilmente fornite dalle formule seguenti:

$$x_1 = -\frac{a}{3} + R + S \qquad 1.8$$

$$x_2 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{2}(R+S) + i\frac{\sqrt{3}}{2}(R-S) \qquad 1.9$$

$$x_3 = -\frac{a}{3} - \frac{1}{2}(R+S) - i\frac{\sqrt{3}}{2}(R-S) \qquad 1.10$$

dove si è posto:

$$R = \sqrt[3]{Q + \sqrt{P^3 + Q^2}} \quad ; \quad S = \sqrt[3]{Q - \sqrt{P^3 + Q^2}} \qquad 1.11$$

Si noti, che se come noi supponiamo è $D \le 0$, le quantità R ed S sono complesse coniugate.

Chiaramente, le formule 1.4, 1.5, 1.6 valgono anche nel caso $D > 0$, e viceversa, le formule 1.8, 1.9, 1.10 valgono anche nel caso $D \le 0$. In queste situazioni però il loro uso è più scomodo.

La tipologia delle radici dell'equazione 1.1 è molteplice. Esse infatti si possono distinguere oltre che per la natura numerica e per la molteplicità anche per il segno. La tipologia completa delle radici dell'equazione 1.1 è riportata, in funzione dei valori di a, b e c nei diagrammi della Appendice 1 di questo scritto. Lo studio del grafico della funzione parametrica:

$$y = x^3 + ax^2 + bx + c \qquad 1.12$$

è riportato invece nella Appendice 2 di questo scritto.

<u>Esempio</u>.

Consideriamo l'equazione:

$$x^3 - 3x^2 + 3x + 2 = 0 \qquad 1.13$$

Nel caso in esame si ha:

$$P = 0 \quad ; \quad Q = -\frac{3}{2} \qquad 1.14$$

per cui risulta:

$$D = \frac{9}{4} \qquad 1.15$$

Dunque, essendo $D > 0$, l'equazione 1.13 possiede una radice reale e due radici complesse coniugate. Per analizzare la tipologia di queste radici dobbiamo riferirci al Diagramma 1 di Tabella 1 (in quanto è $c > 0$ e le radici sono complesse). Da tale diagramma, essendo nel caso in esame $a < 0$, risulta subito che la radice reale dell'equazione 1.13 è necessariamente negativa mentre le radici complesse hanno senz'altro parte reale positiva. In effetti, come si può ottenere con l'applicazione delle formule risolutive sopra riportate, risulta:

$$x_1 = -0.44225 \qquad 1.16$$

$$x_2 = 1.72112 + 1.24902\, i \qquad 1.17$$

$$x_2 = 1.72112 - 1.24902\, i \qquad 1.18$$

Chiaramente, la teoria esposta può essere fruttuosamente applica anche allo studio delle equazioni parametriche. Consideriamo ad esempio l'equazione:

$$x^3 - 3\,x^2 + b\,x + 2 = 0 \qquad 1.19$$

Allora si ha:

$$P = \frac{b-3}{3} \quad ; \quad Q = -\frac{b}{2} \qquad 1.20$$

per cui risulta:

$$D = \frac{(b-3)^3}{27} + \frac{b^2}{4} \qquad 1.21$$

Possiamo quindi concludere che l'equazione 1.19 ammette <u>radici reali</u> qualora risulti:

$$\frac{(b-3)^3}{27} + \frac{b^2}{4} \le 0 \qquad \text{cioè} \qquad b^3 - \frac{9}{4} b^2 + 27b - 27 \le 0 \qquad 1.22$$

L'equazione:

$$b^3 - \frac{9}{4} b^2 + 27b - 27 = 0 \qquad 1.23$$

presenta una radice reale in $b_1 = 1.04894$ e due radici complesse coniugate, per cui la condizione 1.22 è soddisfatta se:

$$b \le 1.04894 \qquad 1.24$$

Per studiare la natura delle radici reali dell'equazione 1.19 (che abbiamo visto esistono qualora b soddisfi alla condizione 1.24) dobbiamo riferirci al Diagramma 2 di Tabella 1. Da tale diagramma, essendo nel caso in esame $a < 0$, risulta subito che una di tali radici è necessariamente negativa. Le altre due soni invece senz'altro positive e possono coincidere solo se $b = 1.04894$, poiché in tal caso risulta $D = 0$ (con $P \ne 0$). Chiaramente, nessuna radice dell'equazione 1.19 può essere nulla in quanto $c \ne 0$. Si noti anche che P non può essere nullo se $D \le 0$ ed in effetti, come risulta dal Diagramma 2 di Tabella 1, il caso di tre radici reali coincidenti può verificarsi solo se $a > 0$.

Concludiamo osservando che dall'esame delle tabelle di Appendice 1 segue che le radici dell'equazione 1.1 hanno tutte <u>parte reale negativa</u> se e solo se sono soddisfatte le seguenti tre condizioni:

$$c > 0 \quad ; \quad a > 0 \quad ; \quad b > \frac{c}{a} \tag{1.25}$$

Come vedremo queste condizioni rivestono notevole importanza per lo studio della stabilità dei sistemi differenziali lineari reali di tre equazioni.

2. APPLICAZIONE ALLO STUDIO DEGLI AUTOVALORI DI UNA MATRICE REALE 3×3

Consideriamo una generica matrice reale 3×3:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

Allora, come si potrebbe facilmente verificare con un calcolo diretto, ponendo:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

si ha:

$$\mathrm{Det}[\mathbf{A} - l\,\mathbf{I}] = -l^3 + \mathrm{Tr}[\mathbf{A}]\,l^2 - (\mathrm{Det}[\mathbf{A}_1] + \mathrm{Det}[\mathbf{A}_2] + \mathrm{Det}[\mathbf{A}_3])\,l + \mathrm{Det}[\mathbf{A}] \tag{2.3}$$

Gli autovalori della matrice **A** sono quindi le radici dell'equazione algebrica di terzo grado:

$$l^3 + a\,l^2 + b\,l + c = 0 \tag{2.4}$$

dove:

$$a = -\ \mathrm{Tr}[\mathbf{A}] \tag{2.5}$$

$$b = \mathrm{Det}[\mathbf{A}_1] + \mathrm{Det}[\mathbf{A}_2] + \mathrm{Det}[\mathbf{A}_3] \tag{2.6}$$

$$c = -\ \mathrm{Det}[\mathbf{A}] \tag{2.7}$$

Lo studio degli autovalori della matrice 2.1 può essere quindi compiuto con le tecniche utilizzate per l'equazione 1.1. In particolare, dalle 1.25 segue che gli autovalori della matrice **A** hanno tutti <u>parte reale negativa</u> se e solo se risulta:

$$\mathrm{Det}[\mathbf{A}] < 0 \quad ; \quad \mathrm{Tr}[\mathbf{A}] < 0 \quad ; \quad \mathrm{Det}[\mathbf{A}_1] + \mathrm{Det}[\mathbf{A}_2] + \mathrm{Det}[\mathbf{A}_3] > \frac{\mathrm{Det}[\mathbf{A}]}{\mathrm{Tr}[\mathbf{A}]} \tag{2.8}$$

Le 2.8 sono importanti nello studio dei sistemi differenziali lineari reali di tre equazioni.

3 APPLICAZIONE ALLO STUDIO DELLA STABILITA' DEI SISTEMI DIFFERENZIALI LINEARI REALI 3×3

Consideriamo il sistema differenziale lineare a coefficienti reali:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \qquad 3.1$$

Come è noto, le soluzioni del sistema differenziale 3.1 sono stabili se gli autovalori della matrice associata del sistema:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad 3.2$$

hanno tutti parte reale negativa. Come abbiamo visto, l'uso delle tabelle di Appendice 1 consente di stabilire che questa circostanza è verificata solo quando sono soddisfatte le condizioni 2.8, cioè se:

$$\mathrm{Det}[\mathbf{A}] < 0 \quad ; \quad \mathrm{Tr}[\mathbf{A}] < 0 \quad ; \quad \mathrm{Det}[\mathbf{A}_1] + \mathrm{Det}[\mathbf{A}_2] + \mathrm{Det}[\mathbf{A}_3] > \frac{\mathrm{Det}[\mathbf{A}]}{\mathrm{Tr}[\mathbf{A}]} \qquad 3.3$$

Le 3.3 nel contesto in esame prendono il nome di *condizioni di stabilità* per il sistema differenziale 3.1. Esse rivestono notevole importanza pratica quando il problema differenziale che si considera è parametrico, cioè quando non tutti gli elementi della matrice **A** hanno un valore assegnato.

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

Appendice 1 **Tabelle per lo studio della tipologia delle radici di una equazione algebrica di terzo grado a coefficienti reali**

TABELLA 1: Tipologia delle radici della equazione 1.1 in relazione ai valori dei parametri *a* e *b* nel caso *c* > 0.

Diagramma 1: **RADICI COMPLESSE**

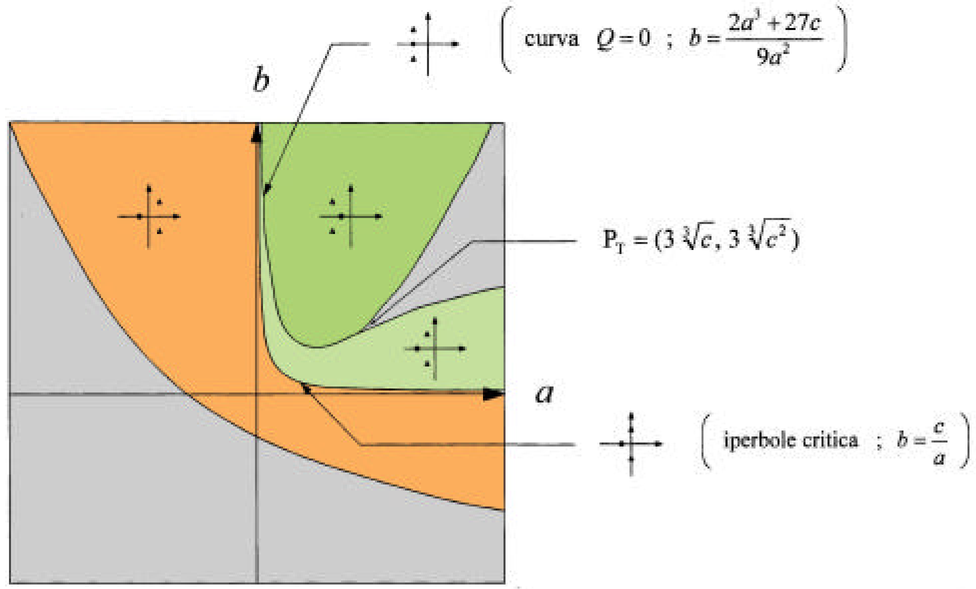


Diagramma 2: **RADICI REALI**

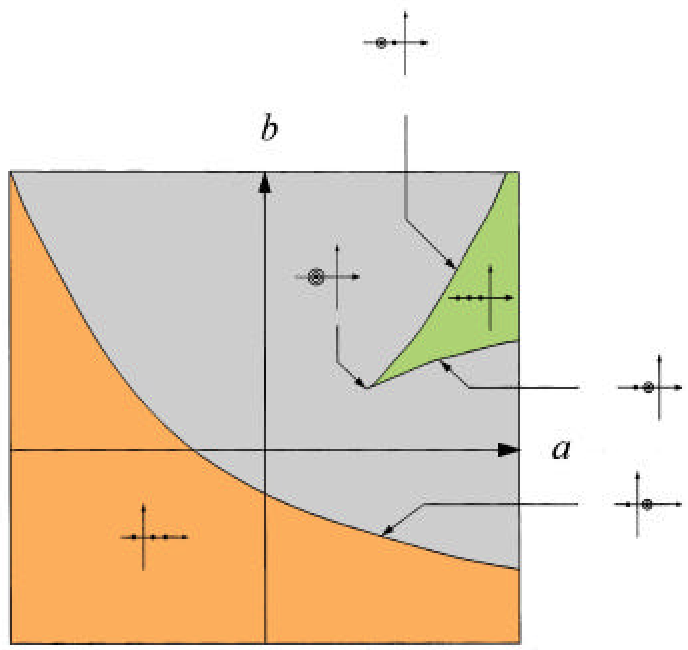


TABELLA 2: Tipologia delle radici della equazione 1.1 in relazione ai valori dei parametri *a* e *b* nel caso *c* = 0.

Diagramma 1: **RADICI COMPLESSE**

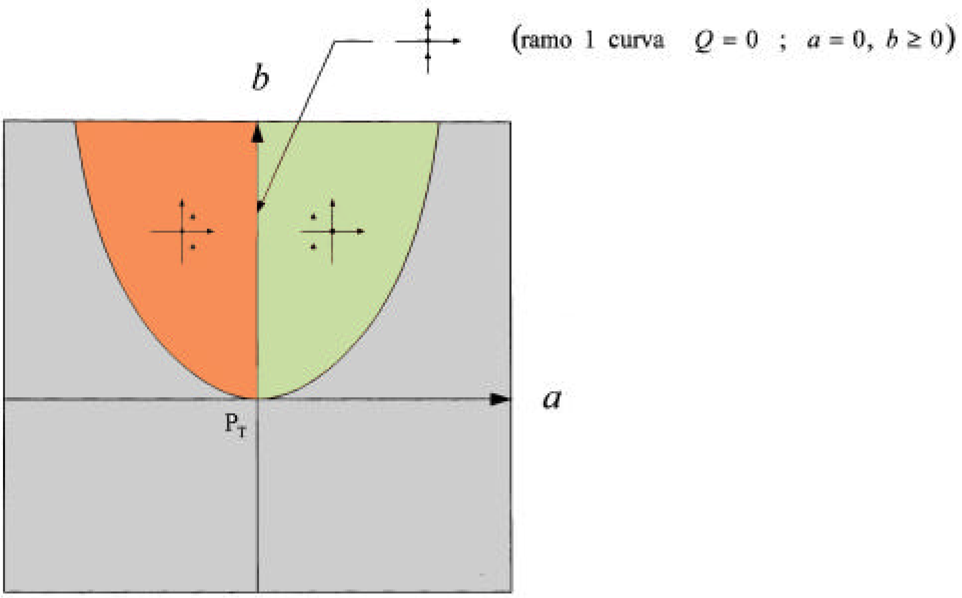


Diagramma 2: **RADICI REALI**

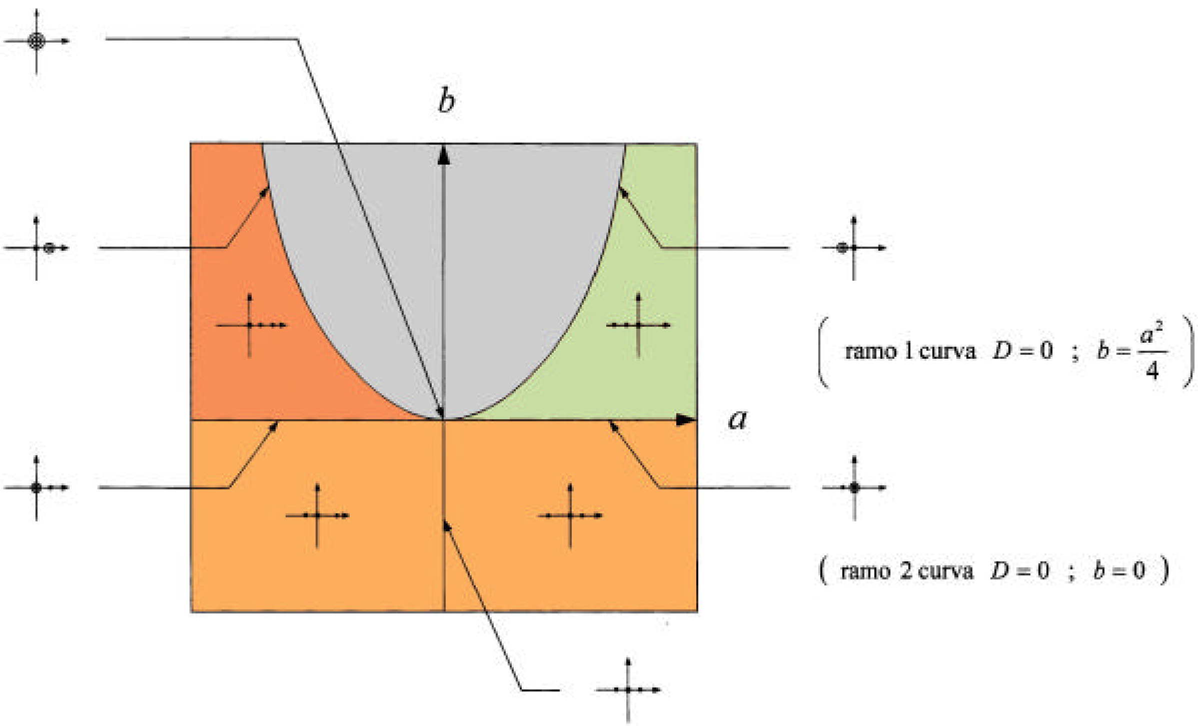


TABELLA 3: Tipologia delle radici della equazione 1.1 in relazione ai valori dei parametri *a* e *b* nel caso $c < 0$.

Diagramma 1: **RADICI COMPLESSE**

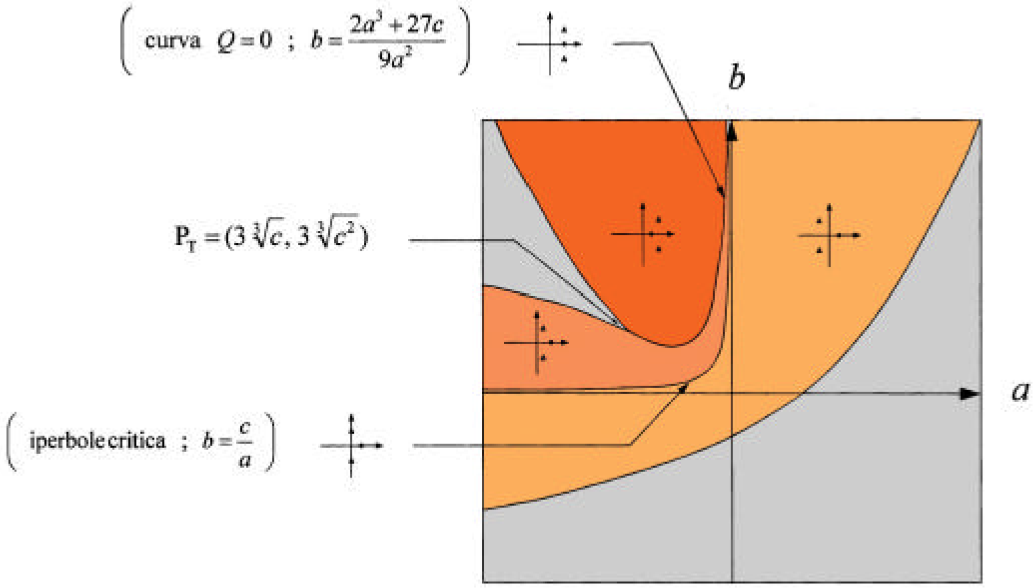
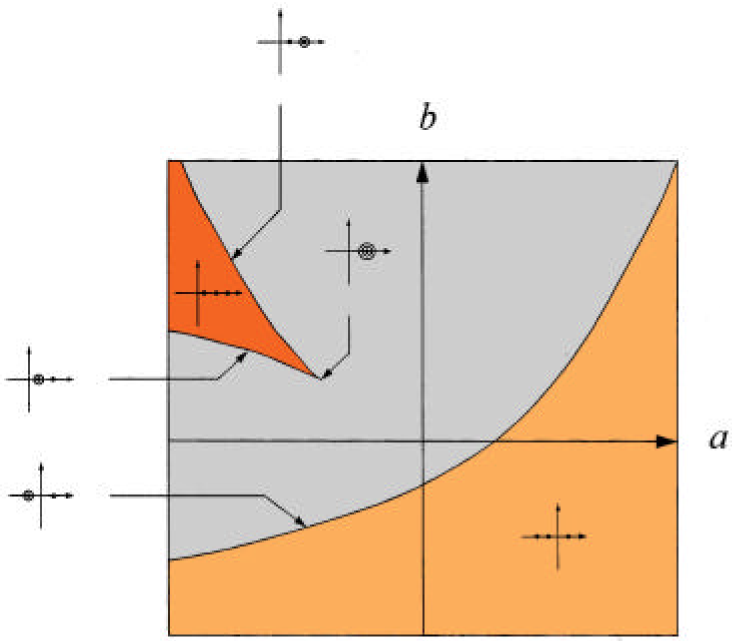


Diagramma 2: **RADICI REALI**



PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

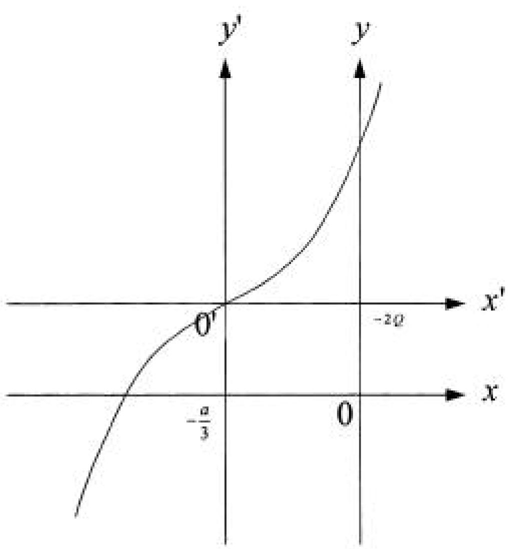
Appendice 2 Analisi del grafico di una funzione cubica a coefficienti reali

TABELLA 4: Tipologia del diagramma della funzione:

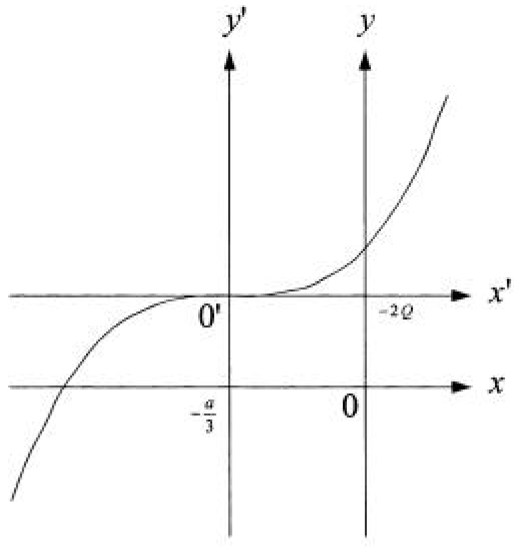
$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \qquad \text{T4.1}$$

in relazione ai valori dei parametri a e b (il parametro c è ininfluente sulla tipologia del diagramma). Si noti che la funzione $f(x)$ è dispari rispetto agli assi x', y'.

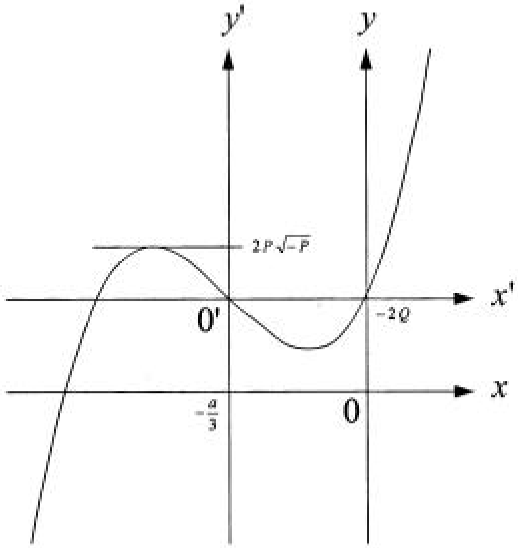
CASO $b > \dfrac{a^2}{3}$



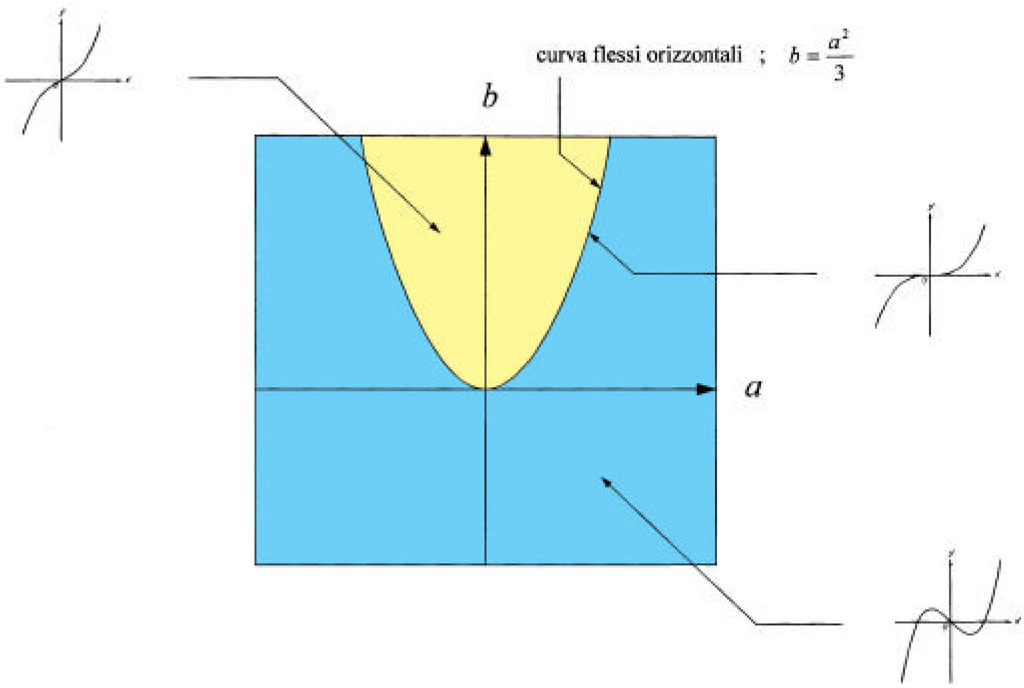
CASO $b = \dfrac{a^2}{3}$



CASO $b < \dfrac{a^2}{3}$



QUADRO RIASSUNTIVO:



BIBLIOGRAFIA GENERALE

[1] L. Brasca, “Tavole Matematiche”, Ghisetti & Corvi

[2] T. M. Apostol, “Calcolo – Volume Secondo, Geometria”, Boringhieri

[3] T. M. Apostol, “Calcolo – Volume Terzo, Analisi 2”, Boringhieri

[4] L. E. Elsgolts, “Equazioni Differenziali e Calcolo delle Variazioni”, Editori Riuniti

[5] V. I. Arnold, “Equazioni Differenziali Ordinarie”, MIR