

M. G. BUSATO

**LE AZIONI AERODINAMICHE
CARATTERIZZANTI IL MOTO
DEI PROIETTILI
SENZA ALETTATURE**

SOMMARIO

In questo scritto, dopo avere inquadrato il problema generale del moto di un proiettile di massa costante e richiamatone le equazioni del moto, viene data la caratterizzazione delle azioni aerodinamiche agenti su un proiettile privo di alettature. Per definire la forza aerodinamica complessiva agente su un proiettile si è adottato un approccio semiempirico basato sulla individuazione dei principali fenomeni fisici dai quali tale forza trae origine. Cioè scomponendo il complesso problema della interazione fra proiettile ed aria in alcuni problemi elementari ed identificando la forza aerodinamica complessiva con la somma delle azioni aerodinamiche associate a questi problemi. Ciò consente anche di chiarire il significato fisico delle forze aerodinamiche che in balistica si considerano convenzionalmente agenti su un proiettile (Drag, Lift, ...) e che spesso sono introdotte in modo assiomatico. Il momento aerodinamico complessivo è definito in modo analogo basandosi sulla caratterizzazione adottata per la forza aerodinamica complessiva. Nell'ultimo paragrafo è riportato un riassunto, sotto forma di tabelle sinottiche e figure, di quanto spiegato nei paragrafi precedenti.

1. INTRODUZIONE

I proiettili sono solidi di rotazione di forma aerodinamica, eventualmente dotati di una alettatura posteriore. La seguente Figura 1.1 mostra schematicamente un tipico proiettile moderno di artiglieria ed un tipico proiettile con alettatura posteriore, dotato di propulsione autonoma. Questo secondo caso non sarà però trattato nel presente scritto.

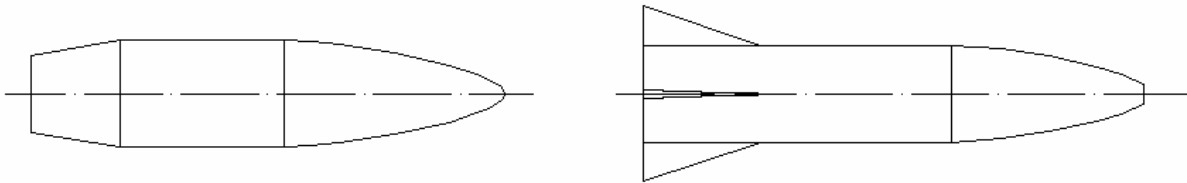


Figura 1.1

Come per ogni corpo solido, la posizione nello spazio di un proiettile risulta individuata quando rispetto ad una terna di riferimento assegnata (fissa o in movimento con legge nota rispetto ad un riferimento inerziale), che indicheremo con $\{S\}$, è nota la posizione del suo centro di massa (che indicheremo con G) e la sua orientazione. Per individuare nello spazio un proiettile occorrono quindi due terne di assi coordinati: la terna $\{S\}$ ed una terna solidale al proiettile (e quindi mobile) che indicheremo con $\{S'\}$ e che conviene scegliere con origine in G ed assi coincidenti con gli assi principali d'inerzia del proiettile stesso. Così facendo infatti, la posizione di G è fornita rispetto alla terna $\{S\}$ dal vettore:

$$\mathbf{r} = \mathbf{G} - \mathbf{O} \tag{1.1}$$

dove con O si è indicata l'origine di $\{S\}$, mentre l'orientazione del proiettile è fornita dai tre angoli che individuano l'orientazione della terna $\{S'\}$ rispetto alla terna $\{S\}$. Il moto del proiettile è completamente individuato, come quello di un qualsiasi corpo solido, dalla conoscenza, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale $\{\bar{S}\}$, della velocità del suo centro di massa G (che indicheremo con $\bar{\mathbf{v}}$) e della sua velocità angolare (che indicheremo con $\bar{\boldsymbol{\omega}}$). Infatti, poiché il moto di $\{S\}$ si suppone conosciuto rispetto ad $\{\bar{S}\}$, una volta noto il vettore $\bar{\mathbf{v}}$ si può ottenere la velocità di G rispetto ad $\{S\}$ (che indicheremo con \mathbf{v}) e quindi la conoscenza in ogni istante del vettore \mathbf{v} (derivata rispetto al tempo del vettore \mathbf{r}) mentre noto il vettore $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ che caratterizza il moto rotatorio di $\{S'\}$ rispetto ad $\{\bar{S}\}$, si può ottenere la conoscenza in ogni istante della orientazione di $\{S'\}$ rispetto ad $\{\bar{S}\}$ e di conseguenza l'orientazione di $\{S'\}$ rispetto ad $\{S\}$. I vettori $\bar{\mathbf{v}}$ ed $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ (di significato fisico ben preciso) si ottengono integrando le cosiddette equazioni cardinali del moto, le quali possono essere scritte relativamente a qualsiasi sistema di riferimento, cioè rappresentando i vettori $\bar{\mathbf{v}}$ ed $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ rispetto ad una terna arbitraria. Tali equazioni legano in modo differenziale la quantità di moto $\bar{\mathbf{Q}}$ ed il momento angolare $\bar{\mathbf{K}}$ del proiettile rispetto a $\{\bar{S}\}$ (che sono rispettivamente una funzione di $\bar{\mathbf{v}}$ ed una funzione di $\bar{\boldsymbol{\omega}}$) alle azioni esterne agenti sul proiettile stesso. Nel sistema di riferimento $\{\bar{S}\}$ le equazioni cardinali del moto hanno la forma seguente:

$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}}{dt} = \mathbf{F}_{\text{est}} \quad 1.2$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{K}}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{est}} \quad 1.3$$

dove \mathbf{F}_{est} ed \mathbf{M}_{est} sono la forza totale ed il momento totale esterni agenti sul proiettile. Si suppone che $\bar{\mathbf{K}}$ ed \mathbf{M}_{est} siano calcolati utilizzando come centro di riduzione l'origine di $\{\bar{\mathbf{S}}\}$ o il baricentro G del proiettile. Spesso tuttavia è più comodo scrivere le equazioni cardinali del moto relativamente ad un sistema di riferimento diverso da $\{\bar{\mathbf{S}}\}$ e non necessariamente il medesimo per entrambe. Ciò che conta infatti è che le equazioni cardinali del moto formino, eventualmente assieme ad opportune equazioni ausiliarie derivanti dall'utilizzo di sistemi di riferimento diversi da $\{\bar{\mathbf{S}}\}$, un sistema differenziale chiuso. In alcuni casi inoltre è opportuno utilizzare non la quantità di moto e/o il momento angolare del proiettile rispetto ad $\{\bar{\mathbf{S}}\}$, cioè i vettori $\bar{\mathbf{Q}}$ e $\bar{\mathbf{K}}$, ma la quantità di moto e/o il momento angolare del proiettile rispetto al sistema di riferimento utilizzato per scrivere le equazioni cardinali del moto, cioè i vettori ottenibili da $\bar{\mathbf{Q}}$ e $\bar{\mathbf{K}}$ avvalendosi della conoscenza del moto del sistema utilizzato rispetto al sistema $\{\bar{\mathbf{S}}\}$. E' chiaro che in tutte queste situazioni le equazioni cardinali del moto assumono una forma differente da quella data dalla 1.2 ed 1.3.

In balistica per determinare il moto di un proiettile si segue proprio un approccio "ibrido" del tipo sopra accennato. Il sistema di riferimento $\{\mathbf{S}\}$ rispetto al quale si descrive il moto del centro di massa del proiettile è assunto solidale alla Terra, e quindi mobile di moto conosciuto, con origine nel punto di sparo. Come sistema di riferimento $\{\mathbf{S}'\}$ si assume poi quello formato dagli assi principali d'inerzia del proiettile. Si introduce infine un sistema di riferimento ausiliario $\{\mathbf{S}_0\}$, inerziale e quindi fisso, coincidente con $\{\mathbf{S}\}$ all'istante iniziale dello sparo. La prima equazione cardinale del moto viene scritta relativamente ad $\{\mathbf{S}\}$ ed utilizzando proprio il vettore quantità di moto del proiettile rispetto a questo sistema di riferimento (vettore che indicheremo con \mathbf{Q}). La seconda equazione cardinale del moto viene scritta invece relativamente ad $\{\mathbf{S}_0\}$, utilizzando il vettore momento angolare del proiettile rispetto ad $\{\mathbf{S}_0\}$ stesso (cioè il vettore $\bar{\mathbf{K}}$); come centro di riduzione dei momenti si assume il centro di massa del proiettile, cioè il punto G. Con le assunzioni fatte le equazioni cardinali del moto del proiettile assumono allora la forma seguente:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\mathbf{W}_T \wedge \mathbf{v} - \mathbf{W}_T \wedge (\mathbf{W}_T \wedge \mathbf{r}) + \frac{1}{m}\mathbf{F}_{\text{est}} \quad 1.4$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{K}}}{dt} = \mathbf{M}_{\text{est}} \quad 1.5$$

dove \mathbf{W}_T è la velocità di rotazione assiale della Terra (supposta come è ovvio costante), ed m è la massa del proiettile. Per maggiori dettagli su quanto ora esposto si veda [1], [2], [3].

Le azioni a cui è soggetto un proiettile in volo sono la forza che la Terra esercita su di esso e le forze ed i momenti dovuti alla interazione con l'aria. Quindi in generale la forza complessiva \mathbf{F}_{est} ed il momento complessivo \mathbf{M}_{est} che agiscono su un proiettile in volo avranno la forma seguente (assumendo come centro di riduzione dei momenti il punto G):

$$\mathbf{F}_{\text{est}} = \mathbf{F}_T + \mathbf{F}_a \quad 1.6$$

$$\mathbf{M}_{\text{est}} = (\mathbf{C}_F - \mathbf{G}) \wedge \mathbf{F}_{\text{est}} + \mathbf{M}_a \quad 1.7$$

dove:

- \mathbf{F}_T è la forza dovuta all'attrazione della Terra,
- \mathbf{F}_a è la forza dovuta all'interazione con l'aria,
- \mathbf{M}_a è il momento naturale dovuto all'interazione con l'aria (momento di Spin Damping),
- \mathbf{C}_F è il punto di applicazione della forza \mathbf{F}_{est} .

Il punto \mathbf{C}_F di applicazione della forza \mathbf{F}_{est} è determinato dalla conoscenza dei punti di applicazione delle forze \mathbf{F}_T ed \mathbf{F}_a . La forza \mathbf{F}_T è applicata al baricentro \mathbf{G} del proiettile. La forza \mathbf{F}_a invece risulta applicata in un punto \mathbf{C}_a del proiettile che dipende anche dall'assetto di volo del proiettile stesso. In pratica quindi l'interazione del proiettile con l'aria risulta caratterizzata da due grandezze: il vettore \mathbf{F}_a ed il punto di applicazione di questo vettore. Tenendo conto di quanto ora detto, la 1.7 si può allora riscrivere nella forma seguente:

$$\mathbf{M}_{\text{est}} = (\mathbf{C}_a - \mathbf{G}) \wedge \mathbf{F}_a + \mathbf{M}_a \quad 1.8$$

dove \mathbf{C}_a , \mathbf{F}_a ed \mathbf{M}_a si devono considerare funzioni note dei parametri che caratterizzano l'interazione del proiettile con l'aria. Poiché è difficile ottenere una caratterizzazione della funzione \mathbf{C}_a , è uso considerare la forza \mathbf{F}_a applicata al baricentro \mathbf{G} del proiettile ed introdurre come azione fisica sul proiettile il corrispondente momento di trasporto:

$$\tilde{\mathbf{M}}_a = (\mathbf{C}_a - \mathbf{G}) \wedge \mathbf{F}_a \quad 1.9$$

Con tale accorgimento la 1.7 fornisce allora:

$$\mathbf{M}_{\text{est}} = \tilde{\mathbf{M}}_a + \mathbf{M}_a \quad 1.10$$

e quindi, tenendo conto anche della 1.6, le equazioni cardinali del moto 1.4 ed 1.5 assumono la forma seguente:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\mathbf{W}_T \wedge \mathbf{v} - \mathbf{W}_T \wedge (\mathbf{W}_T \wedge \mathbf{r}) + \frac{1}{m}(\mathbf{F}_T + \mathbf{F}_a) \quad 1.11$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{K}}}{dt} = \tilde{\mathbf{M}}_a + \mathbf{M}_a \quad 1.12$$

dove \mathbf{F}_T è una funzione nota dei parametri che caratterizzano l'attrazione terrestre mentre \mathbf{F}_a , $\tilde{\mathbf{M}}_a$ ed \mathbf{M}_a sono funzioni note dei parametri che caratterizzano l'interazione del proiettile con l'aria.

Risulta che per le forze \mathbf{F}_T ed \mathbf{F}_a e per i momenti $\tilde{\mathbf{M}}_a$ ed \mathbf{M}_a è possibile ricondursi ad una espres-

sione del tipo:

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F}_T^{(0)} + \text{termini trascurabili} \quad 1.13$$

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{F}_a^{(0)} + \text{termini trascurabili} \quad 1.14$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_a = \tilde{\mathbf{M}}_a^{(0)} + \text{termini trascurabili} \quad 1.15$$

$$\mathbf{M}_a = \mathbf{M}_a^{(0)} + \text{termini trascurabili} \quad 1.16$$

L'ordine di grandezza dei termini trascurabili stabilisce, unitamente all'ordine di grandezza dei termini che compaiono nella 1.11 per la non inerzialità del riferimento utilizzato, il grado di approssimazione caratteristico di un particolare "modello balistico" e al tempo stesso ne definisce il campo di validità. Così, ad esempio, il cosiddetto "modello balistico euleriano" rientra come caso particolare del modello stabilito dalle equazioni 1.11 ed 1.12 sotto le seguenti ipotesi: (1) Trascurabilità degli effetti legati alla non inerzialità del sistema di riferimento adottato per descrivere il moto del centro di massa del proiettile, (2) Trascurabilità dei momenti $\tilde{\mathbf{M}}_a$ ed \mathbf{M}_a , (3) Indipendenza della forza \mathbf{F}_a dalla orientazione e dalla velocità di rotazione del proiettile. Chiaramente, sotto queste ipotesi il proiettile dal punto di vista dinamico risulta assimilato ad un punto materiale e come tale quindi viene identificato. Per maggiori dettagli su quanto ora esposto si veda [3].

In questo scritto caratterizzeremo la forza \mathbf{F}_a ed i momenti $\tilde{\mathbf{M}}_a$ ed \mathbf{M}_a e ne studieremo le principali proprietà. Non effettueremo invece la determinazione esplicita della forza \mathbf{F}_a e dei momenti $\tilde{\mathbf{M}}_a$ ed \mathbf{M}_a . Questo infatti è un tipico problema di aerodinamica che presenta anche notevoli difficoltà risolutive. Un approccio semiempirico a questo problema di fondamentale importanza in balistica, è dato dal cosiddetto "component buildup method" e viene accennato in [4]. Per altri dettagli su questo metodo sviluppato a partire dagli anni '50, si rimanda anche a [5], a [6] ed alla libreria on-line del NACA (<http://naca.larc.nasa.gov>). Un approccio più rigoroso e preciso alla determinazione della forza \mathbf{F}_a e dei momenti $\tilde{\mathbf{M}}_a$ ed \mathbf{M}_a , nato con lo sviluppo dell'informatica, è fornito invece da tecniche di calcolo numerico note come "computational fluid dynamic", implementate in appositi programmi detti CFD. L'uso di questi programmi richiede però di norma delle conoscenze abbastanza approfondite di aerodinamica e calcolo numerico. Per la determinazione della forza \mathbf{F}_T si veda [7].

2. L'AZIONE DELL'ARIA SU UN PROIETTILE IN VOLO

I proiettili, come si è detto, sono solidi di rotazione di forma aerodinamica. In essi si possono fondamentalmente individuare tre componenti: il *fondello*, tipicamente un corto tronco di cono, più raramente un cono, che tuttavia può anche mancare (si parla allora di proiettili a fondo piatto); il *corpo*, di forma cilindrica, ed il *puntale*, tipicamente un'ogiva tangente o secante al corpo, con terminazione a punta, smussata o tronca.⁽¹⁾ Il rapporto fra le lunghezze di questi componenti ed il calibro del proiettile può essere quanto mai vario. La seguente Figura 1.1 mostra schematicamente un tipico proiettile di artiglieria con fondello tronco conico e puntale ogivale secante con terminazione a punta.

¹⁾ I proiettili reali presentano alcune volte degli anelli attorno al corpo e in prossimità del fondello al fine di ottimizzarne il moto all'interno della canna. La presenza di tali sporgenze influenza il valore delle azioni aerodinamiche ma non influisce sulla caratterizzazione di esse poiché non modifica la simmetria del proiettile.

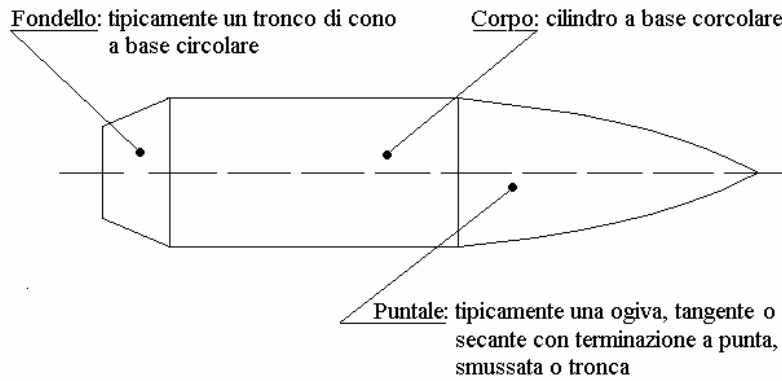


Figura 1.1

L'aria è un fluido viscoso e compressibile. Quando un proiettile l'attraversa essa quindi esercita sul proiettile un'azione la cui origine può ricondursi a fenomeni viscosi e ad una distribuzione di pressione non uniforme che si genera attorno al proiettile in volo. Queste azioni equivalgono ad una forza \mathbf{F}_a applicata in un opportuno punto C_a dell'asse del proiettile detto *centro delle forze aerodinamiche* e ad un momento \mathbf{M}_a la cui direzione coincide con quella dell'asse del proiettile. La forza \mathbf{F}_a prende il nome di *risultante delle azioni aerodinamiche*, mentre il momento \mathbf{M}_a è solo una componente del momento complessivo $\widehat{\mathbf{M}}_a \equiv \mathbf{M}_{est}$ che agisce sul proiettile a causa dell'interazione con l'aria. Si ha infatti, assumendo il baricentro del proiettile come centro di riduzione dei momenti:

$$\widehat{\mathbf{M}}_a = (\mathbf{C}_a - \mathbf{G}) \wedge \mathbf{F}_a + \mathbf{M}_a \quad 2.1$$

A proposito della 2.1, è da notare che la posizione di C_a sull'asse del proiettile dipende dalla forma ed anche dall'assetto di volo del proiettile stesso. La sua distanza da G dipende poi anche dalla localizzazione di G , cioè dalla distribuzione delle masse nel proiettile (a parità di forma). L'individuazione del punto C_a è quindi quanto mai complessa e per tali ragioni è uso non definire il momento $\widehat{\mathbf{M}}_a$ per mezzo della 2.1 ma in modo "diretto" nel senso che vedremo nel Paragrafo 4.

Come si è detto, per descrivere il moto del centro di massa di un proiettile si utilizza una terna ortogonale solidale ad un punto della superficie terrestre ed avente orientazione fissa rispetto alla Terra. Indichiamo con $\{P, x, y, z\}$ questa terna ortogonale ed assumiamo che l'asse z coincida con la normale esterna alla superficie terrestre in P . Indichiamo poi con $\{P, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ la terna inerziale coincidente con $\{P, x, y, z\}$ all'istante dello sparo, rispetto alla quale viene descritto il moto di rotazione del proiettile attorno al suo centro di massa. Siano infine \mathbf{v} la velocità del centro di massa del proiettile rispetto a $\{P, x, y, z\}$, $\bar{\mathbf{w}}$ la velocità angolare del proiettile rispetto a $\{P, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ e \mathbf{w} il campo di velocità dell'aria rispetto a $\{P, x, y, z\}$. Solitamente si assume $\mathbf{w} = 0$ o al più che \mathbf{w} sia una funzione di z . In ogni caso comunque si ritiene che il campo \mathbf{w} sia irrotazionale e piccolo rispetto a \mathbf{v} . Chiaramente, se $\mathbf{w} = 0$ il vettore \mathbf{v} rappresenta anche la velocità del centro di massa del proiettile rispetto all'aria (nel sistema di riferimento $\{P, x, y, z\}$) ed il vettore $\bar{\mathbf{w}}$ rappresenta anche la velocità angolare del proiettile rispetto all'aria (nel sistema di riferimento $\{P, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$). Se invece il campo di velocità \mathbf{w} è non nullo, allora la velocità relativa del centro di massa del proiettile rispetto all'aria è $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ (nel sistema di riferimento $\{P, x, y, z\}$) mentre la velocità angolare relativa del proiettile rispetto all'aria è ancora $\bar{\mathbf{w}}$ (nel sistema di riferimento $\{P, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$), in quanto per ipotesi $\text{rot } \mathbf{w} = 0$.

Supporre $\mathbf{w} = 0$ può sembrare un'ipotesi artificiosa, ma in realtà è spesso accettabile anche perché solitamente si evita di sparare in condizioni di "aria turbolenta". Nel seguito, per semplicità supporremo sempre che sia $\mathbf{w} = 0$. Ciò infatti non è limitativo in quanto il caso $\mathbf{w} \neq 0$ si ottiene da quello $\mathbf{w} = 0$ eseguendo la sostituzione formale $\mathbf{v} \rightarrow \tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$.

Sia x' l'asse del proiettile ed y', z' una coppia di assi fra loro ortogonali passanti per il suo centro di massa G ed ortogonali all'asse x' . E' chiaro che per un proiettile senza alettature x', y', z' formano sempre una terna di assi principali d'inerzia del proiettile. In Figura 2.2 è mostrato l'assetto normale di volo di un proiettile del tipo da noi considerato (cioè senza alettature). L'asse del proiettile ha costantemente un piccolo sfasamento di angolo \mathbf{d} (variabile) rispetto alla direzione della velocità \mathbf{v} ed il vettore $\bar{\omega}$ è anch'esso costantemente vicino all'asse del proiettile; ciò dipende dal fatto che ad un proiettile senza alettature per ragioni di stabilità è imposta una rotazione oraria attorno all'asse x' . Il centro delle forze aerodinamiche C_a si trova costantemente davanti a G , anche se la sua distanza da G dipende dall'assetto di volo del proiettile.

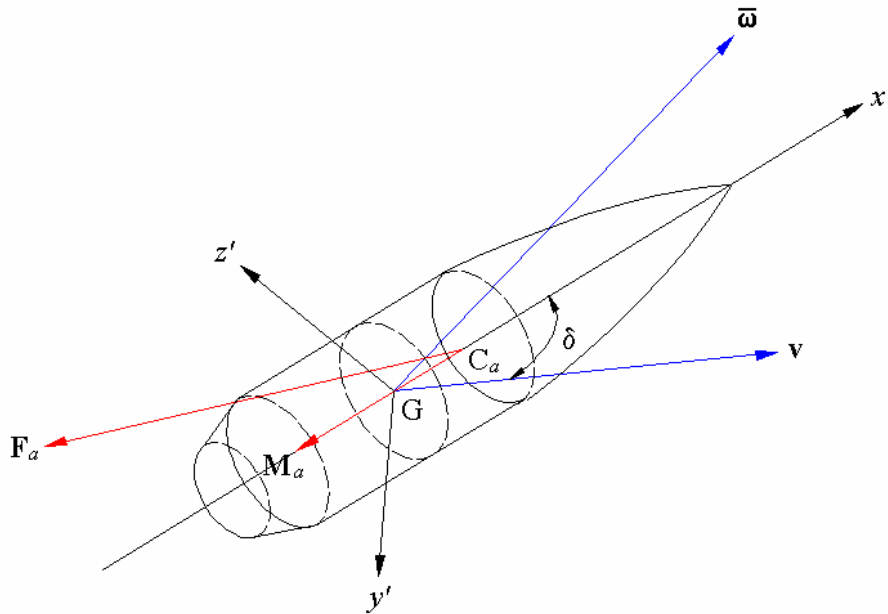


Figura 2.2

Indichiamo con $\hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{y}}', \hat{\mathbf{z}}'$ i versori degli assi x', y', z' ($\hat{\mathbf{x}}'$ diretto verso la punta del proiettile) e con $\Sigma_{x'}$ il piano ortogonale a $\hat{\mathbf{x}}'$, cioè il piano individuato dai versori $\hat{\mathbf{y}}'$ e $\hat{\mathbf{z}}'$. Indichiamo quindi con $\hat{\mathbf{v}}$ il versore di \mathbf{v} e con $\Sigma_{\mathbf{v}}$ il piano ortogonale a $\hat{\mathbf{v}}$. L'esperienza mostra che se \mathbf{d} si mantiene sempre molto piccolo (come deve essere), allora la forza \mathbf{F}_a ha direzione costantemente vicina a quella della velocità \mathbf{v} , ma verso opposto ad essa. Ciò porta a scrivere:

$$\mathbf{F}_a = -\tilde{R}\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{f}_a \quad 2.2$$

dove \tilde{R} è una quantità positiva ed \mathbf{f}_a è la proiezione di \mathbf{F}_a sul piano $\Sigma_{\mathbf{v}}$. Per quanto ora detto, si avrà, in generale:

$$|\mathbf{f}_a| \ll \tilde{R} \quad 2.3$$

mentre, per ovvie ragioni di simmetria, $\mathbf{f}_a = 0$ se entrambi i vettori \mathbf{v} ed $\bar{\mathbf{w}}$ giacciono sull'asse del proiettile. Il momento \mathbf{M}_a nasce per il fatto che al proiettile, come si è detto, è imposta una rotazione attorno al proprio asse. Esso infatti è l'effetto della resistenza opposta dall'aria alla rotazione assiale, ed in assenza di questa sarebbe nullo. Poiché il senso di rotazione imposto ai proiettili è quello orario, possiamo allora scrivere:

$$\mathbf{M}_a = -M_a \hat{\mathbf{x}}' \quad 2.4$$

dove M_a è una quantità positiva, nulla se $\bar{\mathbf{w}}$ è ortogonale all'asse del proiettile.

La forza \mathbf{F}_a ed il momento \mathbf{M}_a dipendono da numerosi fattori e, in linea di principio, potrebbero essere calcolati determinando, mediante le equazioni della dinamica dei fluidi proprie del modello di aria prescelto, la distribuzione di pressione che si genera attorno al proiettile in assegnate condizioni di moto. La via più semplice e diretta per quantificare \mathbf{F}_a ed \mathbf{M}_a è però quella sperimentale. A tale proposito risulta allora opportuno osservare che \mathbf{F}_a ed \mathbf{M}_a , essendo l'effetto della interazione fra il proiettile in moto e l'aria, non possono che dipendere:

- dalla forma e dimensione del proiettile e dal materiale di cui è fatta la sua superficie,
- dalle caratteristiche fisiche dell'aria,
- dal moto del proiettile rispetto all'aria.

E' evidente inoltre che l'accelerazione di gravità e la massa del proiettile non possono avere alcuna influenza nel problema in esame. In relazione ai tre fattori sopra precisati dai quali deve dipendere la caratterizzazione della forza \mathbf{F}_a e del momento \mathbf{M}_a , occorre rilevare che:

- (a) La forma e la dimensione del proiettile possono essere caratterizzate da un unico parametro dimensionale del proiettile stesso, ad esempio, il calibro d . Infatti, la forma del proiettile può sempre essere definita a partire da d nel modo schematicamente mostrato in Figura 2.4, dopo di che il valore di d caratterizza la dimensione del proiettile.

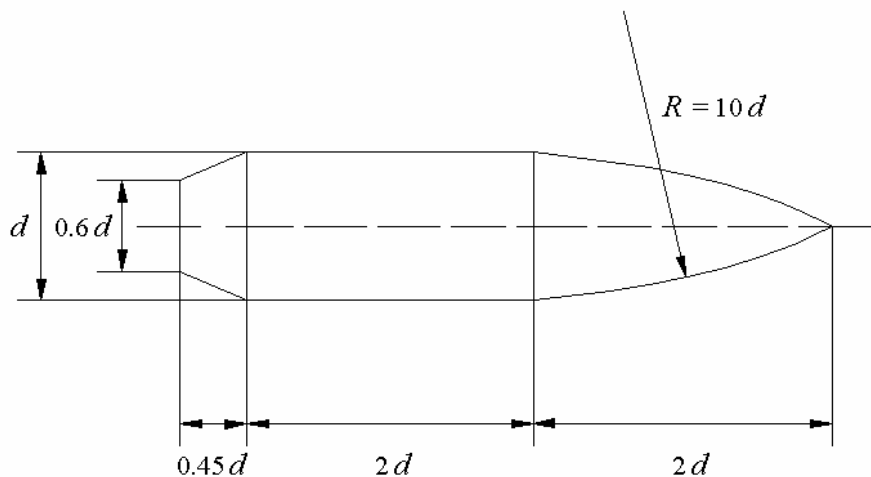


Figura 2.4

- (b) Le caratteristiche fisiche dell'aria, essendo essa un fluido viscoso e compressibile, sono rappresentabili per mezzo della densità \mathbf{r} , della viscosità cinematica \mathbf{n} (che caratterizza la viscosità) e della velocità del suono c (che caratterizza la compressibilità).

(c) Il moto del proiettile rispetto all'aria, per evidenti ragioni di simmetria, è completamente individuato dai moduli dei vettori $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$ ed $\bar{\mathbf{w}}$, dagli angoli che questi vettori formano con l'asse del proiettile, e dall'angolo che formano tra loro le proiezioni di questi vettori sul piano $\Sigma_{x'}$.

Poiché supponiamo $\mathbf{w} = 0$, per noi il moto del proiettile rispetto all'aria risulta individuato dai vettori \mathbf{v} ed $\bar{\mathbf{w}}$, dagli angoli che questi vettori formano con l'asse x' , e dall'angolo che formano tra loro le proiezioni di \mathbf{v} ed $\bar{\mathbf{w}}$ sul piano $\Sigma_{x'}$. Sia v il modulo di \mathbf{v} , \bar{w} il modulo di $\bar{\mathbf{w}}$, d l'angolo fra \mathbf{v} e l'asse x' (considerato positivo se diretto da \mathbf{v} verso x'), ed e l'angolo fra $\bar{\mathbf{w}}$ e l'asse x' . Si ha allora, riferendo \mathbf{v} ed $\bar{\mathbf{w}}$ agli assi x', y', z' :

$$\mathbf{v} = v \cos d \hat{\mathbf{x}}' + \mathbf{v}' \quad ; \quad \bar{\mathbf{w}} = \bar{w} \cos e \hat{\mathbf{x}}' + \bar{\mathbf{w}}' \quad 2.5$$

dove con \mathbf{v}' ed $\bar{\mathbf{w}}'$ si sono rappresentate rispettivamente la proiezione di \mathbf{v} ed $\bar{\mathbf{w}}$ sul piano $\Sigma_{x'}$. Se perciò indichiamo con a l'angolo fra i vettori \mathbf{v}' ed $\bar{\mathbf{w}}'$, possiamo concludere che il moto del proiettile rispetto all'aria è individuato dai valori di:

$$v, \bar{w}, d, e, a \quad 2.6$$

Spesso tuttavia è utilizzato un altro insieme di parametri. Sia W la velocità di rotazione del proiettile attorno al proprio asse (imposta, come si è detto, per ragioni di stabilità) ed indichiamo con \bar{w}' il modulo di $\bar{\mathbf{w}}'$. Allora, essendo:

$$W = \bar{w} \cos e \quad ; \quad \bar{w}' = \bar{w} \sin e \quad 2.7$$

è evidente che in luogo dei cinque parametri indicati nella 2.6 si potranno usare i seguenti:

$$v, W, \bar{w}', d, a \quad 2.8$$

Questi sono i parametri che noi nel seguito adotteremo per caratterizzare il moto del proiettile rispetto all'aria. La Figura 2.5 mostra schematicamente quanto ora esposto.

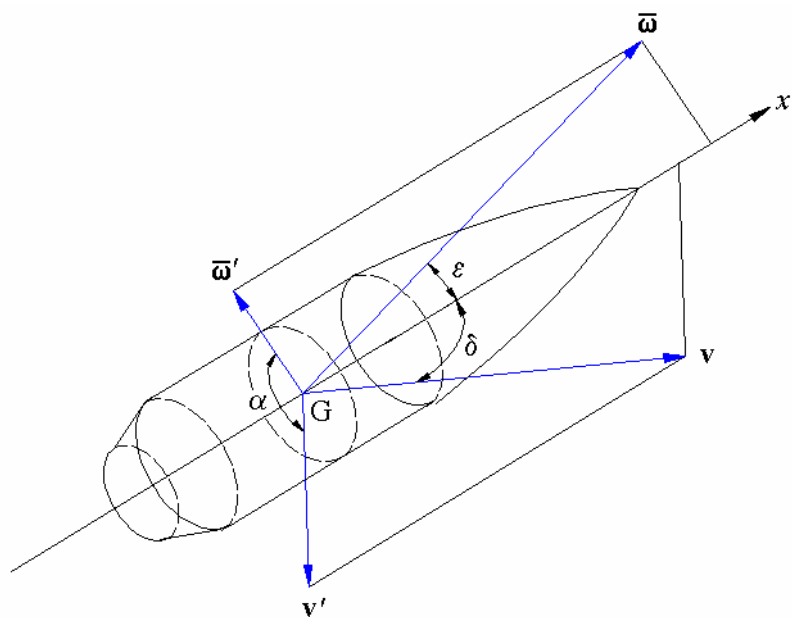


Figura 2.5

Si noti che con l'utilizzo dei parametri indicati nella 2.8 il piano individuato dal vettore \mathbf{v} e dall'asse x' assume un ruolo di riferimento. Nel seguito tale piano sarà indicato con Σ_d .

In forza di quanto precede, possiamo asserire che la proiezione della forza \mathbf{F}_a lungo una qualsiasi direzione di versore $\hat{\mathbf{x}}$ ed il momento \mathbf{M}_a , devono essere una funzione delle seguenti nove variabili: d ; \mathbf{r} , \mathbf{n} , c ; v , \mathbf{W} , $\bar{\mathbf{w}}'$, \mathbf{d} , \mathbf{a} ; deve essere cioè:

$$\mathbf{F}_a \cdot \hat{\mathbf{x}} = \tilde{F}_x(d, \mathbf{r}, \mathbf{n}, c, v, \mathbf{W}, \bar{\mathbf{w}}', \mathbf{d}, \mathbf{a}) \quad 2.9$$

$$M_a = \tilde{F}_{M_a}(d, \mathbf{r}, \mathbf{n}, c, v, \mathbf{W}, \bar{\mathbf{w}}', \mathbf{d}, \mathbf{a}) \quad 2.10$$

Chiaramente, le relazioni ora scritte sono puramente formali in quanto esse devono risultare dimensionalmente omogenee. Per fare ciò avvaliamoci allora della *Analisi Dimensionale*. Si ha:

$$[\mathbf{F}_a \cdot \hat{\mathbf{x}}] = \text{M L T}^{-2} \quad ; \quad [M_a] = \text{M L}^2 \text{T}^{-2} \quad 2.11$$

mentre le dimensioni delle grandezze fisiche da cui $\mathbf{F}_a \cdot \hat{\mathbf{x}}$ ed M_a devono dipendere sono le seguenti (\mathbf{d} ed \mathbf{a} sono numeri puri):

$$[d] = \text{L} \quad ; \quad [\mathbf{r}] = \text{M L}^{-3} \quad ; \quad [\mathbf{n}] = \text{L}^2 \text{T}^{-1} \quad ; \quad [c] = \text{L T}^{-1} \quad ; \quad [v] = \text{L T}^{-1} \quad ; \quad [\mathbf{W}] = \text{T}^{-1} \quad ; \quad [\bar{\mathbf{w}}'] = \text{T}^{-1} \quad 2.12$$

Usiamo come grandezze principali \mathbf{r} , d e v . Allora le grandezze secondarie sono $\mathbf{F}_a \cdot \hat{\mathbf{x}}$, M_a , \mathbf{n} , c , \mathbf{W} e $\bar{\mathbf{w}}'$ ed i numeri puri ad esse associati risultano:

$$\mathbf{P}_{\mathbf{F}_a \cdot \hat{\mathbf{x}}} = \frac{\mathbf{F}_a \cdot \hat{\mathbf{x}}}{\mathbf{r} d^2 v^2} \quad ; \quad \mathbf{P}_{M_a} = \frac{M_a}{\mathbf{r} d^3 v^2} \quad ; \quad \mathbf{P}_n = \frac{\mathbf{n}}{v d} \quad ; \quad \mathbf{P}_c = \frac{c}{v} \quad ; \quad \mathbf{P}_W = \frac{\mathbf{W} d}{v} \quad ; \quad \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{w}}'} = \frac{\bar{\mathbf{w}}' d}{v} \quad 2.13$$

Ne segue che le espressioni atte a rappresentare le grandezze $\mathbf{F}_a \cdot \hat{\mathbf{x}}$ ed M_a devono essere necessariamente del tipo seguente (ricordando che \mathbf{d} ed \mathbf{a} sono numeri puri):

$$\mathbf{F}_a \cdot \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{r} d^2 v^2 \mathbf{F}_x(\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_c, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{w}}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \quad 2.14$$

$$M_a = \mathbf{r} d^3 v^2 \mathbf{F}_{M_a}(\mathbf{P}_n, \mathbf{P}_c, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{w}}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \quad 2.15$$

dove \mathbf{F}_x è una funzione la cui espressione dipende dalla forma del proiettile, dal materiale costituente la sua superficie, dalla posizione del suo centro di massa G e dalla direzione $\hat{\mathbf{x}}$ considerata, mentre \mathbf{F}_{M_a} è una funzione, necessariamente positiva, la cui espressione dipende dalla forma del proiettile e dal materiale costituente la sua superficie; per quanto detto a proposito delle 2.4, deve essere $\mathbf{F}_{M_a} = 0$ se $\mathbf{P}_W = 0$. Si noti che l'espressione della funzione \mathbf{F}_x deve dipendere da G in quanto a parità di v , \mathbf{W} , $\bar{\mathbf{w}}'$, \mathbf{d} ed \mathbf{a} , due proiettili di medesima forma ma diversa posizione del centro di massa interagiscono in modo differente con l'aria circostante. Ricordiamo infatti che la velocità \mathbf{v}_p di un punto qualsiasi P della superficie del proiettile si ottiene dalla conoscenza di \mathbf{v} ed $\bar{\mathbf{w}}$ per mezzo della seguente relazione:

$$\mathbf{v}_p = \mathbf{v} + \bar{\omega} \wedge (\mathbf{P} - \mathbf{G}) \quad 2.16$$

Dunque, parità di \mathbf{v} ed $\bar{\omega}$, la velocità \mathbf{v}_p che caratterizza l'interazione del proiettile con l'aria in P, dipende dalla posizione di G. La seguente Figura 2.6 schematizza quanto ora detto nel piano ortogonale al vettore $\bar{\omega}'$.

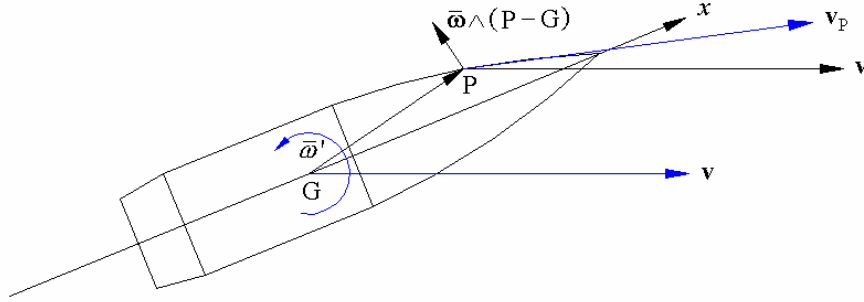


Figura 2.6

Poiché \mathbf{P}_n e \mathbf{P}_c sono rispettivamente il reciproco del *numero di Reynolds* R_e ed il reciproco del *numero di Mach* M , le 2.14 e 2.15 possono anche risciversi nel modo seguente (dove si è lasciato inalterato il simbolo che rappresenta la funzione e per uniformarsi alle convenzioni si è invertito l'ordine delle variabili \mathbf{P}_n e \mathbf{P}_c):

$$\mathbf{F}_a \cdot \hat{\mathbf{x}} = r d^2 v^2 \mathbf{F}_x(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{\omega}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \quad 2.17$$

$$M_a = r d^3 v^2 \mathbf{F}_{M_a}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{\omega}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \quad 2.18$$

Le espressioni ora ottenute definiscono completamente la forma generale della forza \mathbf{F}_a e del momento \mathbf{M}_a . Per la 2.17 è chiaro infatti che dovrà essere:

$$\mathbf{F}_a = r d^2 v^2 \mathbf{F}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{\omega}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \quad 2.19$$

mentre, avvalendoci della 2.18, dalla 2.4 si ottiene:

$$\mathbf{M}_a = -r d^3 v^2 \mathbf{F}_{M_a}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{\omega}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \hat{\mathbf{x}}' \quad 2.20$$

Nelle 2.19, \mathbf{F} è una funzione vettoriale la cui espressione dipende dalla forma del proiettile, dal materiale costituente la sua superficie e dalla posizione di G, mentre nella 2.20 \mathbf{F}_{M_a} è una funzione positiva la cui espressione dipende dalla forma del proiettile e dal materiale costituente la sua superficie. Deve essere $\mathbf{F}_{M_a} = 0$ se $\mathbf{P}_W = 0$.

Sulle proprietà delle funzioni \mathbf{F} e \mathbf{F}_{M_a} nulla può dirsi in generale, occorre però rilevare che se $v = 0$ la forza \mathbf{F}_a non risulta esattamente nulla qualora sia $\mathbf{P}_W \mathbf{P}_{\bar{\omega}'} \neq 0$. Ciò mostra che deve essere:

$$\mathbf{F}_a = r d^2 v^2 \mathbf{F}^{(0)}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{\omega}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) + r d^4 \Omega \bar{\omega}' \mathbf{F}^{(1)}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{\omega}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \quad 2.21$$

dove $F^{(0)} \neq 0$ se $P_W P_{\bar{w}} = 0$ mentre $F^{(1)} \neq 0$ se $v = 0$. L'esperienza mostra poi che le funzioni $F^{(0)}$ e $F^{(1)}$ non devono mai annullarsi nell'origine. Occorre rilevare anche che M_a non può annullarsi se $v = 0$. Dunque, tenendo presente quanto precedentemente detto circa la funzione F_{M_a} , possiamo concludere che deve essere:

$$M_a = -r d^5 W^2 \tilde{F}_{M_a}(M, R_e, P_W, P_{\bar{w}}, d, a) \hat{x}' \quad 2.22$$

dove \tilde{F}_{M_a} è una funzione positiva, non nulla per $M, R_e, P_W, P_{\bar{w}}, d, a = 0$. E' da rilevare però che spesso nella letteratura specializzata per definire M_a non si usa la forma 2.22 ma un'espressione della forma seguente:

$$M_a = r d^4 v W \widehat{F}_{M_a}(M, R_e, P_W, P_{\bar{w}}, d, a) \hat{x}' \quad 2.23$$

dove \widehat{F}_{M_a} è una funzione negativa. Ciò infatti semplifica le equazioni del moto e non crea problemi in quanto in balistica non si considera mai il caso $v = 0$.

3. CARATTERIZZAZIONE DELLA FORZA F_a

La forza F_a può chiaramente essere ottenuta calcolandone per via numerica, mediante appositi software, la proiezione lungo tre assi ortogonali qualsiasi. Questo modo di procedere non può tuttavia fornire una caratterizzazione della forza F_a che consenta di definire dei modelli balistici sufficientemente generali. Esso inoltre non consente neppure di stabilire quali eventuali semplificazioni si possano in generale adottare senza commettere errori grossolani. Per caratterizzare la forza F_a ed eseguirne un'analisi si adotta allora un approccio semiempirico basato sulla individuazione dei principali fenomeni fisici dai quali F_a trae origine. In pratica, il complesso problema della interazione fra proiettile ed aria viene scomposto in alcuni problemi elementari e la forza F_a viene identificata con la somma delle azioni aerodinamiche associate a questi problemi. Concretamente, assumendo F_a rappresentata dalla 2.21, si individuano cinque "componenti fisiche" principali, attraverso le quali esprimere la forza F_a . Esse sono le seguenti:

- **R** Drag (resistenza aerodinamica)
- **L** Lift (spinta aerodinamica)
- **S** Pitch Damping (forza di smorzamento del beccheggio)
- **E_d** Sbandamento Laterale (forza principale dovuta all'effetto Magnus)
- **E_w** Sbandamento Trasversale (forza secondaria dovuta all'effetto Magnus)

Con l'impostazione adottata si è quindi condotti ad assumere:

$$F_a = R + L + S + E_d + E_w \quad 3.1$$

Non tutte le forze considerate hanno però la stessa rilevanza, alcune infatti possono essere trascurate o producono solo effetti perturbativi. Analizziamo ora più in dettaglio le forze testé introdotte in modo anche da mostrarne l'origine fisica.

(1) Drag

La forza di Drag \mathbf{R} è la componente principale della forza aerodinamica \mathbf{F}_a e non può mai essere omessa a meno che il moto del proiettile non avvenga praticamente in assenza di aria (come a quote elevatissime per le quali è lecito considerare $\mathbf{F}_a = 0$). Essa caratterizza la resistenza dell'aria dovuta alla pressione e alla viscosità che ostacola l'avanzamento traslatorio del proiettile, supposto rotante attorno al proprio asse (avente orientazione fissa).⁽²⁾ Essa quindi non rappresenta la resistenza effettiva opposta dall'aria, ma solo la sua componente principale. Non viene infatti tenuto conto della rotazione trasversale del proiettile rappresentata dal vettore $\bar{\omega}'$. Chiaramente, la forza \mathbf{R} deve essere prevalentemente una funzione di v e deve annullarsi se $v = 0$. Essa inoltre è una forza frenante del moto del centro di massa per cui la sua orientazione deve essere in ogni istante opposta a quella di $\hat{\mathbf{v}}$. Ricordando l'espressione generale che secondo il modello d'interazione aria-proiettile da noi adottato deve avere una forza aerodinamica, si assume allora:

$$\mathbf{R} = -r d^2 v^2 \mathbf{F}_R(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{v}} \quad 3.2$$

dove \mathbf{F}_R è una funzione positiva la cui espressione dipende dalla forma del proiettile e dal materiale costituente la sua superficie (è chiaro infatti, per la 2.16, che \mathbf{F}_R non può dipendere dalla posizione del centro di massa). Tale funzione prende il nome di *coefficiente di drag*. L'esperienza mostra che la forza \mathbf{R} risulta applicata in un punto C_R dell'asse del proiettile, la cui distanza dall'estremità anteriore del proiettile indicheremo con l_R e la cui ordinata x' indicheremo con x'_R . Il valore di l_R dipende dalla forma del proiettile e dal suo assetto di volo. Per i proiettili del tipo da noi considerato (senza alettature) risulta comunque che il punto C_R si colloca sempre davanti a G , si ha cioè $x'_R > 0$. Chiaramente, poiché C_R si trova sull'asse del proiettile, la forza \mathbf{R} si può pensare appartenente al piano formato dall'asse x' e dal vettore \mathbf{v} , cioè al piano Σ_d . In Figura 3.1 è illustrato quanto ora detto proprio relativamente a tale piano.

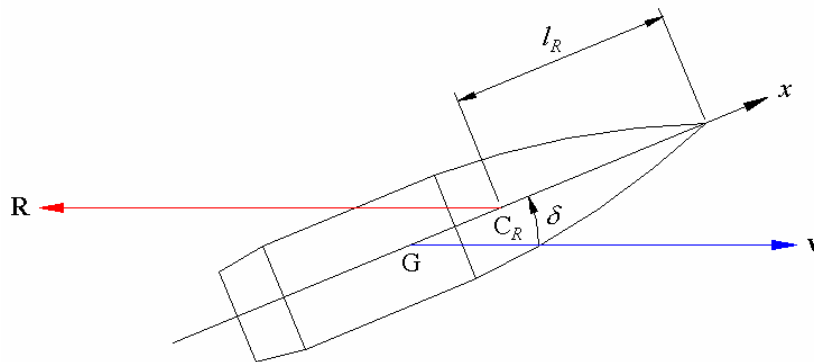


Figura 3.1

Sebbene in linea di principio \mathbf{F}_R debba essere una funzione di $M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{d}$, l'esperienza mostra che tale funzione dipende praticamente solo da M, R_e e \mathbf{d} . In balistica inoltre anche la dipendenza

²⁾ Per definizione quindi \mathbf{R} è la forza che agirebbe sul proiettile se questo, rotante con orientazione fissa attorno al proprio asse ancorato ad un banco di prova in galleria del vento, venisse investito, con uno sfasamento \mathbf{d} rispetto al suo asse, da una corrente d'aria uniforme di velocità v .

dal numero di Reynolds si può praticamente sempre trascurare in quanto per i valori assunti normalmente da R_e nel caso dei proiettili, la funzione F_R risulta di fatto indipendente da questa variabile. Nelle applicazioni balistiche si può quindi in generale assumere:

$$F_R = F_R(M, \mathbf{d}) \quad 3.3$$

Chiaramente, $F_R(M, \mathbf{d})$ deve essere una funzione positiva. Essa inoltre deve essere manifestamente una funzione crescente di $|\mathbf{d}|$ nell'intervallo $[0, \mathbf{p}/2[$. L'esperienza mostra che una soddisfacente approssimazione di F_R si ottiene nella forma seguente:

$$F_R = F_R^0(M) + F_R^1(M) \sin^2 \mathbf{d} \quad 3.4$$

dove $F_R^0(M)$, $F_R^1(M)$ sono entrambe funzioni positive. Poiché, per evidenti ragioni, l'angolo \mathbf{d} deve mantenersi costantemente piccolo, nei modelli balistici più semplificati è lecito trascurare la dipendenza di F_R da \mathbf{d} e quindi assumere:⁽³⁾

$$F_R = F_R^0(M) \quad 3.5$$

La funzione $F_R^0(M)$ prende il nome di *coefficiente di drag per angolo di attacco nullo* ed in numerose pubblicazioni specializzate se ne possono trovare tabulazioni o formule d'interpolazione, relative a diverse tipologie di proiettile. In Figura 3.2 è mostrato l'andamento della funzione $F_R^0(M)$ per alcune tipologie di proiettile standard.⁽⁴⁾ In Figura 3.3 e Figura 3.4 è riportato invece il diagramma di $F_R^0(M)$ ed il diagramma di $F_R^1(M)$ per il proiettile d'artiglieria "Tipo M1" da 105 mm. La scheda delle caratteristiche aerodinamiche di questo proiettile è riportata in Appendice 3.

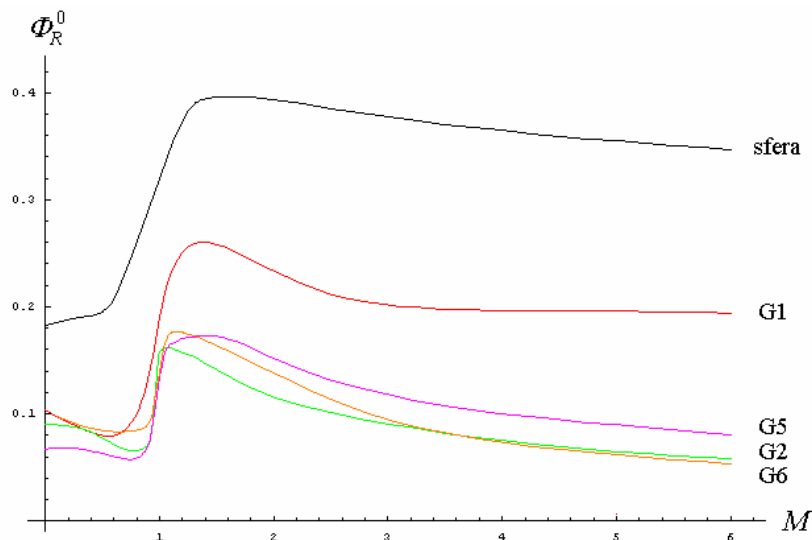


Figura 3.2

³⁾ Questa peraltro è necessariamente la scelta obbligata qualora il proiettile sia identificato con un punto materiale (come nel modello balistico euleriano).

⁴⁾ Per maggiori dettagli sui tipi di proiettile indicati si veda Appendice 1.

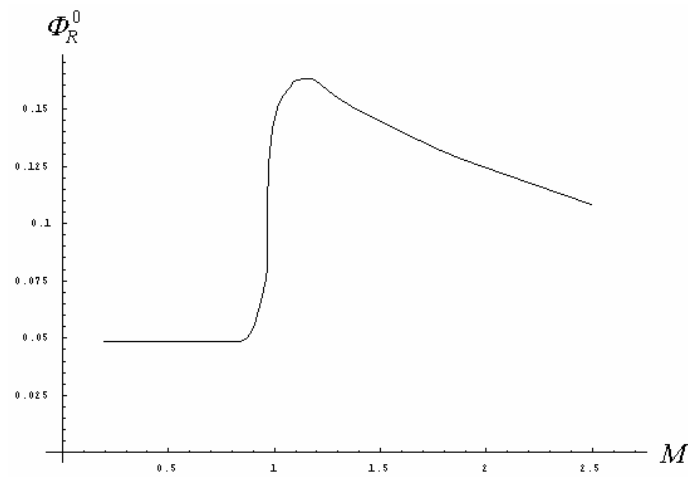


Figura 3.3

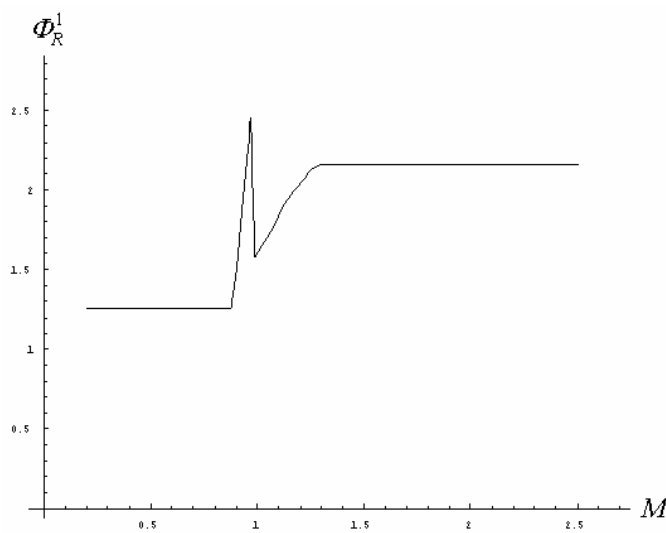


Figura 3.4

Concludiamo l'argomento osservando che in letteratura col nome "coefficiente di drag" viene spesso indicata non la funzione F_R associata ad \mathbf{R} per mezzo della 3.1, ma una funzione ad essa proporzionale. E' questo ad esempio il caso in cui in luogo della 3.1 si assuma per \mathbf{R} la seguente espressione:

$$\mathbf{R} = -\frac{1}{2} \rho A v^2 C_D(M, R_e, \mathbf{P}_w, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{v}} \quad 3.6$$

dove A è l'area della sezione frontale del proiettile:

$$A = \frac{\rho}{4} d^2 \quad 3.7$$

Si ha allora manifestamente:

$$C_D = \frac{8}{\rho} F_R \quad 3.8$$

Per maggiori dettagli sui simboli utilizzati in balistica per rappresentare i coefficienti aerodinamici si veda Appendice 2. Osserviamo infine che alcune volte nelle pubblicazioni specializzate non vengono riportati i valori del coefficiente di drag ma quelli di grandezze dimensionali ad esso correlabili, come ad esempio la ritardazione. In questi casi può allora capitare che i valori riportati siano espressi in unità anglosassoni invece che metrico-decimali.

(2) Lift

La forza di Lift \mathbf{L} è dopo il Drag la più rilevante componente della forza aerodinamica \mathbf{F}_a . Essa caratterizza l'azione aerodinamica dovuta all'effetto Bernulli in condizioni di avanzamento traslatorio e sola rotazione assiale, cioè nelle stesse condizioni rispetto alle quali è definito il Drag. Il Lift quindi non rappresenta l'azione totale associata all'effetto Bernulli ma solo la sua componente principale. Non viene infatti tenuto conto della rotazione trasversale del proiettile rappresentata dal vettore $\bar{\mathbf{w}}'$. Ricordiamo che l'effetto Bernulli si verifica quando sulla superficie di un corpo investito da una corrente fluida, la velocità del fluido ha una distribuzione non simmetrica. In queste condizioni infatti, per il teorema di Bernulli,⁵⁾ sul corpo viene a crearsi una distribuzione di pressioni anch'essa non simmetrica, la cui risultante è una forza agente sul corpo. L'azione di questa forza è appunto l'effetto Bernulli. Nel caso dei proiettili senza alettature (che sono solidi di rotazione) l'effetto Bernulli può ovviamente verificarsi solo se oltre ad essere $v \neq 0$ è anche $\mathbf{d} \neq 0$. Per ragioni di simmetria poi la forza risultante ad esso associata deve giacere nel piano formato dall'asse x' e dal vettore \mathbf{v} (piano Σ_d) e deve essere ortogonale a \mathbf{v} . Essa inoltre deve sempre essere orientata verso la superficie del proiettile non direttamente investita dall'aria (per cui \mathbf{L} risulta una forza di sostentamento se Σ_d è verticale e $\mathbf{d} > 0$, cioè se l'asse del proiettile si trova sopra la direzione della velocità del centro di massa). Ricordando l'espressione generale che secondo il modello d'interazione aria-proiettile da noi adottato deve avere una forza aerodinamica, si è quindi condotti ad assumere:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} d^2 v^2 \sin |\mathbf{d}| F_L(M, R_e, \mathbf{P}_w, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{e}}_L \quad 3.9$$

dove:

$$\hat{\mathbf{e}}_L = \frac{(\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{v}}}{|(\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{v}}|} \quad 3.10$$

e F_L è una funzione la cui espressione dipende dalla forma del proiettile e dal materiale costituente la sua superficie (è chiaro infatti, per la 2.16, che F_L non può dipendere dalla posizione del centro di massa). Tale funzione prende il nome di *coefficiente di lift* e deve essere positiva se $|\mathbf{d}| < \mathbf{d}_c$ mentre deve essere nulla se $|\mathbf{d}| \geq \mathbf{d}_c$, dove \mathbf{d}_c è un angolo critico il cui valore dipende da v e dalla forma del proiettile. Ciò si spiega col fatto che se l'angolo d'attacco \mathbf{d} supera un certo valore assoluto, sulla parte del proiettile non investita direttamente dal flusso d'aria si ha un distacco della vena fluida e l'effetto Bernulli scompare. L'esperienza mostra che la forza \mathbf{L} risulta applicata nello stesso punto C_R in cui è applicata la forza di drag \mathbf{R} . In Figura 3.5 è illustrato nel piano Σ_d quanto ora detto.

Sebbene in linea di principio F_L debba essere una funzione di $M, R_e, \mathbf{P}_w, \mathbf{d}$, dalle osservazioni sperimentali risulta che tale funzione, al pari di F_R , dipende praticamente solo da M, R_e e \mathbf{d} . Inoltre

⁵⁾ Precisamente, il teorema di Bernulli stabilisce che la pressione sulla superficie di un corpo immerso in un fluido in moto, risulta minore in quelle regioni della superficie del corpo dove la velocità del fluido è maggiore.

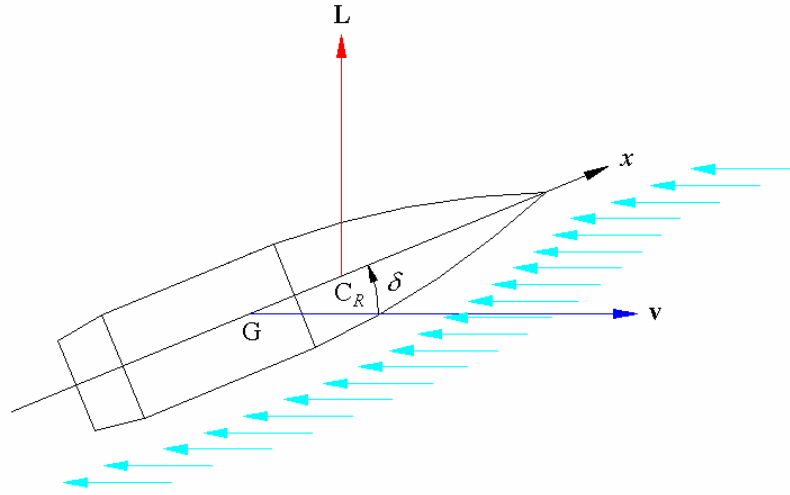


Figura 3.5

anche per F_L è di norma lecito trascurare la dipendenza da R_e , per cui si può in generale assumere:

$$F_L = F_L(M, \mathbf{d}) \quad 3.11$$

Chiaramente, $F_L(M, \mathbf{d})$ deve essere una funzione positiva se $|\mathbf{d}| < \mathbf{d}_c$ e nulla se $|\mathbf{d}| \geq \mathbf{d}_c$. Essa inoltre quando $|\mathbf{d}| < \mathbf{d}_c$, deve essere manifestamente una funzione crescente di \mathbf{d} . L'esperienza mostra che una soddisfacente approssimazione di F_L si ottiene nella forma seguente:

$$F_L = F_L^0(M) + F_L^1(M) \sin^2 \mathbf{d} \quad 3.12$$

dove $F_L^0(M)$, $F_L^1(M)$ sono entrambe funzioni positive (si suppone ovviamente $|\mathbf{d}| < \mathbf{d}_c$). Poiché, per evidenti ragioni, l'angolo \mathbf{d} deve mantenersi costantemente piccolo e senz'altro minore dell'angolo critico \mathbf{d}_c , nei modelli balistici più semplificati è lecito trascurare la dipendenza di F_L da \mathbf{d} e quindi assumere:

$$F_L = F_L^0(M) \quad 3.13$$

La funzione $F_L^0(M)$ prende il nome di *coefficiente lineare di lift* e nelle pubblicazioni specializzate se ne possono trovare tabulazioni relative a diverse tipologie di proiettile. In Figura 3.6 e Figura 3.7 è riportato a titolo d'esempio il diagramma di $F_L^0(M)$ e quello di $F_L^1(M)$ per il proiettile d'artiglieria "Tipo M1" da 105 mm (lo stesso proiettile al quale si riferiscono i diagrammi di Figura 3.3 e Figura 3.4). Come si vede confrontando i diagrammi di Figura 3.3 e Figura 3.6, è $F_L^0 > F_R^0$. Tuttavia risulta $\mathbf{L} < \mathbf{R}$ in quanto in \mathbf{L} compare il fattore $\sin|\mathbf{d}|$, che deve considerarsi piccolo affinché sia lecito, come si è supposto, rappresentare i coefficienti F_L e F_R per mezzo delle funzioni F_L^0 e F_R^0 . La condizione $\mathbf{L} < \mathbf{R}$ è poi sempre verificata in pratica in quanto l'angolo \mathbf{d} è di norma sempre molto piccolo. Si tenga inoltre presente che se $|\mathbf{d}| \geq \mathbf{d}_c$ allora è $\mathbf{L} = 0$. Risulta quindi provato che rispetto al Drag, il Lift è una componente secondaria della forza aerodinamica \mathbf{F}_a .

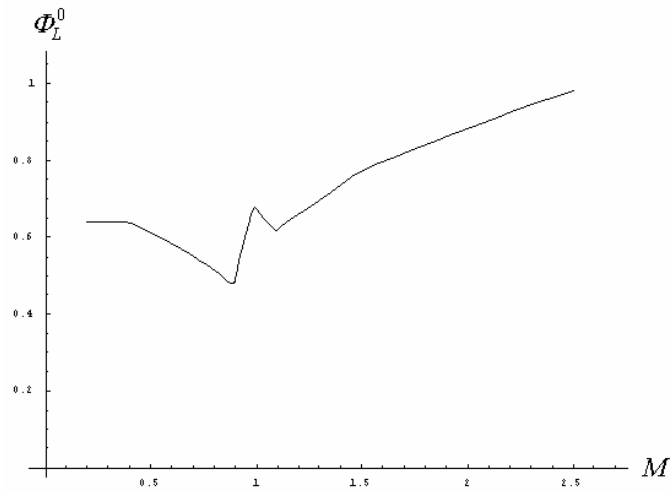


Figura 3.6

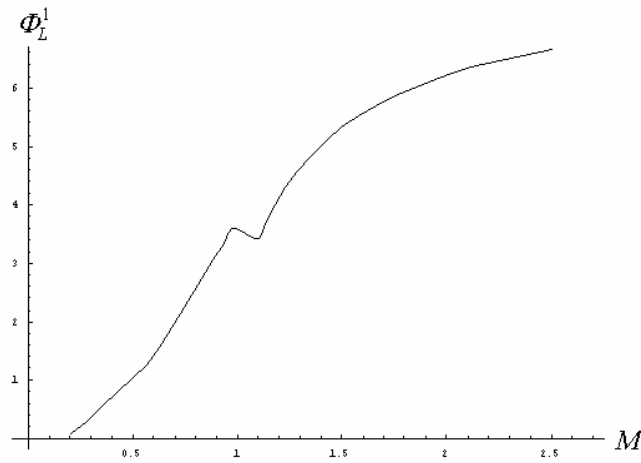


Figura 3.7

Chiaramente, poiché:

$$|(\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{v}}| = \sin|\mathbf{d}| \quad 3.14$$

la 3.9 può anche scriversi nel modo seguente:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} d^2 v^2 \mathbf{F}_L(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{d})(\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{v}} \quad 3.15$$

dove non compare esplicitamente il fattore $\sin|\mathbf{d}|$. Tale fattore è comunque conglobato nel vettore $(\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{v}}$ il cui modulo è $\sin|\mathbf{d}|$, come risulta dalla 3.14.

Concludiamo rilevando che in letteratura, come per il coefficiente di drag, col nome “coefficiente di lift” viene spesso indicata non la funzione \mathbf{F}_L associata ad \mathbf{L} per mezzo della 3.9, ma una funzione ad essa proporzionale. E’ questo ad esempio il caso in cui in luogo della 3.9 si assuma per \mathbf{L} la seguente espressione (relativa alla stessa convenzione della 3.6):

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2} \rho A v^2 \sin|\mathbf{d}| C_L(M, R_e, P_w, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{e}}_L \quad 3.16$$

dove A è l'area della sezione frontale del proiettile:

$$A = \frac{\rho}{4} d^2 \quad 3.17$$

Si ha allora manifestamente:

$$C_L = \frac{8}{\rho} F_L \quad 3.18$$

OSSERVAZIONE

Come si è visto il Drag \mathbf{R} ed il Lift \mathbf{L} sono forze aerodinamiche alle quali corrisponde un preciso significato fisico. In alcuni casi però risulta conveniente non utilizzare direttamente tali forze ma riferirsi alla proiezione della loro somma lungo l'asse del proiettile e lungo un asse a questo ortogonale, passante per C_R e giacente nel piano Σ_d . Si introducono così le seguenti due forze:

$$\mathbf{X} = [(\mathbf{R} + \mathbf{L}) \cdot \hat{\mathbf{x}}'] \hat{\mathbf{x}}' \quad 3.19$$

$$\mathbf{N} = [(\mathbf{R} + \mathbf{L}) \cdot \hat{\mathbf{n}}'] \hat{\mathbf{n}}' \quad 3.20$$

dove con $\hat{\mathbf{n}}'$ si è indicato il versore ottenuto ruotando $\hat{\mathbf{x}}'$ nel piano Σ_d di 90° secondo il senso di \mathbf{d} positivo, cioè ponendo:

$$\hat{\mathbf{n}}' = \frac{(\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{|(\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{x}}'|} \quad 3.21$$

La forza \mathbf{X} prende il nome di *forza aerodinamica assiale*, mentre \mathbf{N} prende il nome di *forza aerodinamica normale*. Esse si devono considerare applicate in C_R . E' uso assumere:

$$\mathbf{X} \cdot \hat{\mathbf{x}}' \equiv X = \rho d^2 v^2 F_X \quad ; \quad \mathbf{N} \cdot \hat{\mathbf{n}}' \equiv N = \rho d^2 v^2 \sin|\mathbf{d}| F_N \quad 3.22$$

dove F_X e F_N sono funzioni analoghe a F_R e F_L che prendono rispettivamente il nome di *coefficiente aerodinamico assiale* e *coefficiente aerodinamico normale*. In Figura 3.8 è illustrato nel piano Σ_d quanto ora esposto. Dalle 3.19 e 3.20 si ottiene, ponendo $R = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{v}}$, $L = \mathbf{L} \cdot \hat{\mathbf{e}}_L$:

$$R = N \sin|\mathbf{d}| - X \cos \mathbf{d} \quad 3.23$$

$$L = N \cos \mathbf{d} + X \sin|\mathbf{d}| \quad 3.24$$

e da queste relazioni si traggono immediatamente le seguenti formule che legano i coefficienti F_R e F_L ai coefficienti F_X e F_N :

$$F_R = F_N \sin^2 \mathbf{d} - F_X \cos \mathbf{d} \quad 3.25$$

$$F_L = F_N \cos \mathbf{d} + F_X \quad 3.26$$

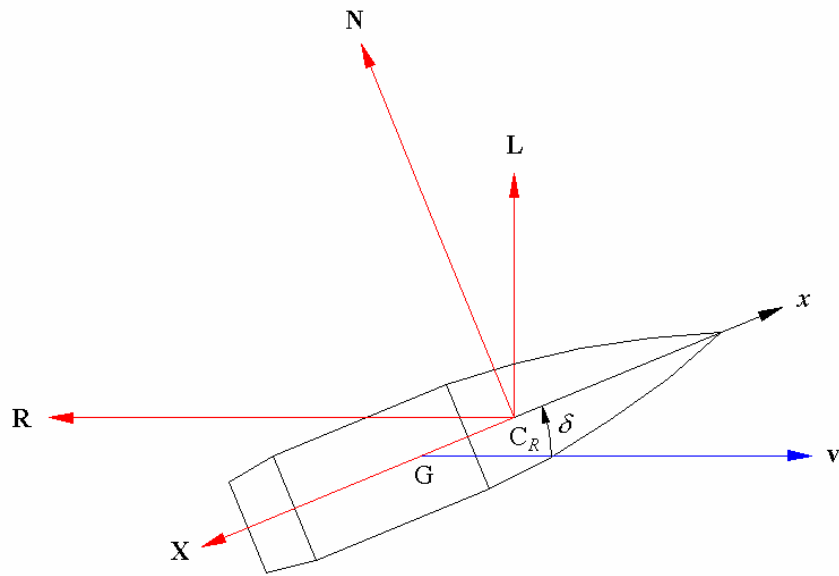


Figura 3.8

Si vede così che:

$$F_L = \frac{1}{\cos d} (F_N - F_R) \quad 3.27$$

Spesso in balistica per esprimere F_L si utilizza proprio la relazione 3.27, in quanto il coefficiente F_N è più facile da determinare. Si noti che se d è piccolo, dalle 3.25 e 3.26 (o 3.27) risulta con buona approssimazione:

$$F_R = -F_X \quad 3.28$$

$$F_L = F_N - F_R \quad 3.29$$

La 3.29, per l'ipotesi con la quale è stata ottenuta, consente di legare F_L^0 a F_R^0 .

(3) Pitch Damping

Il Pitch Damping S è una componente in generale trascurabile della forza aerodinamica F_a che tuttavia è opportuno considerare per completezza e perché il momento che ne risulta associato riveste un ruolo importante per la stabilità del moto del proiettile. Essa caratterizza il contributo portato al Drag ed al Lift dalla rotazione trasversale \bar{w}' . Tale rotazione, trascurata nella definizione di R ed L , produce infatti sulla superficie del proiettile una distribuzione locale di velocità dell'aria che va a perturbare il campo di velocità dovuto all'avanzamento traslatorio ed alla rotazione assiale (la cui azione sul proiettile è rappresentata dal Drag e dal Lift). Ciò provoca una distribuzione aggiuntiva non uniforme di pressione la cui risultante è una forza agente sul proiettile, che, con l'impostazione da noi adottata per caratterizzare F_a , è lecito considerare separatamente da R ed L . Chiaramente, per la 2.16, la distribuzione locale di velocità dell'aria causata dalla rotazione trasversale \bar{w}' dipende anche dalla posizione del centro di massa G del proiettile. Anche la forza S risulta quindi dipendere, al contrario di R ed L , dalla posizione di G , cioè dalla distribuzione interna delle masse del proiettile. Ovviamente, S è non nulla solo se oltre ad essere $v \neq 0$ è anche $\bar{w}' \neq 0$. Inoltre, nel caso dei proiettili senza alettature (che sono solidi di rotazione), per ragioni di simmetria S deve essere

ortogonale all'asse x' e deve giacere sul piano passante per x' ed ortogonale al vettore \bar{w}' (che definisce l'asse d'istantanea rotazione trasversale). Ricordando l'espressione generale che secondo il modello d'interazione aria-proiettile da noi adottato deve avere una forza aerodinamica, si è quindi condotti ad assumere:

$$\mathbf{S} = \mathbf{r} d^3 v \bar{w}' F_S^{(G)}(M, R_e, \mathbf{P}_w, \mathbf{P}_{w'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \hat{\mathbf{e}}_S \quad 3.30$$

dove:

$$\hat{\mathbf{e}}_S = \frac{\bar{w}' \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{|\bar{w}' \wedge \hat{\mathbf{x}}'|} \quad 3.31$$

e $F_S^{(G)}$ è una funzione la cui espressione dipende dalla forma del proiettile, dal materiale costituente la sua superficie e dalla posizione di G (come si è voluto mettere in evidenza apponendo ad essa l'apice "G"). Essa prende il nome di *coefficiente di pitch damping* e nulla può dirsi in generale circa il suo segno. Esso infatti dipende fortemente dalla tipologia del proiettile e dalla posizione del suo centro di massa. Per tale ragione non è neppure possibile indicarne un diagramma tipo. Inoltre, stante la scarsa rilevanza pratica della forza \mathbf{S} , nelle tavole che forniscono le caratteristiche aerodinamiche dei proiettili, spesso di questa funzione non vengono riportate indicazioni. Anche per la posizione del punto di applicazione della forza \mathbf{S} , nulla può dirsi in generale. Tale punto, che indicheremo con C_S , giace infatti sull'asse del proiettile ma la sua distanza l_S dall'estremità anteriore del proiettile dipende fortemente dalla forma, dall'assetto di volo e dalla posizione del centro di massa del proiettile stesso. In Figura 3.9 è illustrato quanto ora detto nella ipotesi che sia $F_S^{(G)} < 0$ e C_S davanti a G (come solitamente accade almeno a velocità supersoniche per la tipologia di proiettile indicata in figura).

Come si è detto, il momento associato alla forza \mathbf{S} riveste grande importanza per la stabilità del moto del proiettile. La conoscenza del segno di $F_S^{(G)}$ e la conoscenza della collocazione del punto di applicazione di \mathbf{S} sarebbero quindi dati fondamentali se il momento associato ad \mathbf{S} si dovesse ottenere nella forma $(C_S - G) \wedge \mathbf{S}$. Poiché tuttavia, come vedremo, il momento associato ad \mathbf{S} viene definito in modo differente (mediante rilievi sperimentali), questi dati non assumono in pratica alcuna rilevanza e pertanto non ci soffermeremo oltre su di essi. Osserviamo però che la dipendenza di $F_S^{(G)}$ dalla posizione del centro di massa del proiettile può essere rappresentata in modo esplicito, con evidente vantaggio pratico. Si dimostra infatti la seguente formula, che consente di esprimere il coefficiente di pitch damping di un proiettile con centro di massa nel punto G' , attraverso il coefficiente di pitch damping di un proiettile di identica forma e centro di massa in un punto G, diverso da G' :

$$F_S^{(G')} = F_S^{(G)} - \frac{l_{G'} - l_G}{d} F_N \quad 3.32$$

dove con $l_{G'}$ ed l_G si è indicata la distanza di G' e di G dalla estremità anteriore del proiettile, con d il calibro del proiettile e con F_N il coefficiente aerodinamico normale relativo alla tipologia di proiettile considerata (v. 3.22). La formula 3.32 è importante perché avvalendosi di essa è possibile ottenere il coefficiente di pitch damping di tutti i proiettili di medesima forma ma differente posizione del centro di massa, quando è noto il coefficiente di pitch damping di un proiettile standard della forma considerata. Per maggiori dettagli su questo punto si rimanda a [2] ed alla bibliografia ivi riportata (nel Cap. 2).

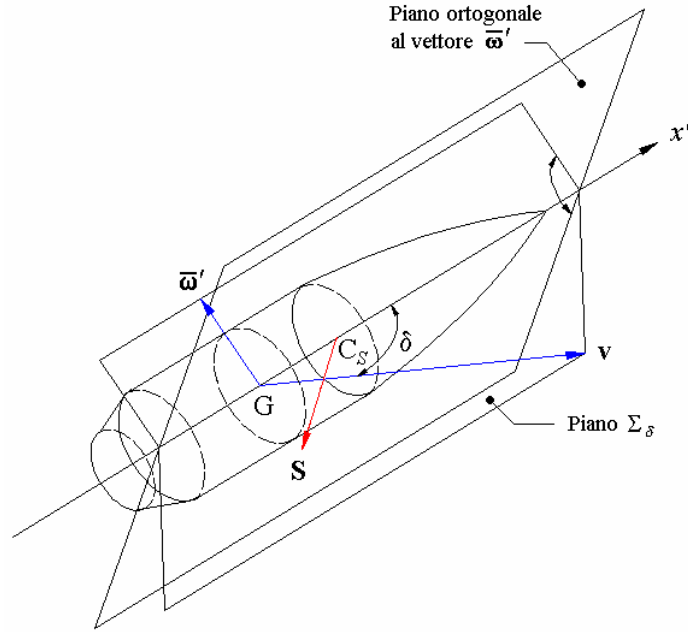


Figura 3.9

Chiaramente, poiché:

$$|\bar{\omega}' \wedge \hat{\mathbf{x}}'| = \bar{\omega}' \quad 3.33$$

la 3.30 può anche scriversi nel modo seguente:

$$\mathbf{S} = \mathbf{r} d^3 v F_S^{(G)}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{\omega}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \bar{\omega}' \wedge \hat{\mathbf{x}}' \quad 3.34$$

dove non compare esplicitamente il fattore $\bar{\omega}'$. Tale fattore è comunque conglobato nel vettore $\bar{\omega}' \wedge \hat{\mathbf{x}}'$ il cui modulo è $\bar{\omega}'$, come risulta dalla 3.33. Un'altra rappresentazione della forza \mathbf{S} si ottiene osservando che la derivata rispetto al tempo del versore $\hat{\mathbf{x}}'$ calcolata relativamente al sistema di riferimento inerziale $\{P, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$ (rispetto al quale è descritto il moto rotatorio del proiettile), risulta legata ad $\bar{\omega}'$ dalla seguente relazione:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} = \bar{\omega}' \wedge \hat{\mathbf{x}}' \quad 3.35$$

Dunque la 3.34 si può anche scrivere così:

$$\mathbf{S} = \mathbf{r} d^3 v F_S^{(G)}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{\omega}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} \quad 3.36$$

dove, ovviamente, la derivata del versore $\hat{\mathbf{x}}'$ si intende eseguita relativamente al sistema di riferimento inerziale $\{P, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$.

Concludiamo rilevando che in letteratura, come per il coefficiente di drag ed il coefficiente di lift, col nome “coefficiente di pitch damping” viene spesso indicata non la funzione $F_S^{(G)}$ associata ad \mathbf{S} per mezzo della 3.30, ma una funzione ad essa proporzionale. E' questo ad esempio il caso in cui in

luogo della 3.30 si assuma per \mathbf{S} la seguente espressione (relativa alla stessa convenzione della 3.6 e 3.16):

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{r} A d v \bar{\mathbf{w}}' C_{N_{\bar{\mathbf{w}}}}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{w}}}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \hat{\mathbf{e}}_S \quad 3.37$$

dove A è l'area della sezione frontale del proiettile:

$$A = \frac{\mathbf{P}}{4} d^2 \quad 3.38$$

Si ha allora manifestamente:

$$C_{N_{\bar{\mathbf{w}}}} = \frac{8}{\mathbf{p}} \mathbf{F}_S^{(G)} \quad 3.39$$

OSSERVAZIONE

Riguardo alla forza \mathbf{S} occorre fare una precisazione di carattere concettuale. Oltre al meccanismo fisico che genera la forza \mathbf{S} esiste infatti un altro meccanismo fisico, non contemplato nel modello d'interazione aria-proiettile da noi adottato, che genera una forza che nel caso dei proiettili senza alettature agisce praticamente nella stessa direzione di \mathbf{S} . Questa forza, che denoteremo con \mathbf{S}_d , nasce a causa della variazione dell'angolo di attacco \mathbf{d} e risulta proporzionale alla velocità di variazione di \mathbf{d} , cioè a $\dot{\mathbf{d}}$. Essa è rappresentabile mediante la seguente relazione:

$$\mathbf{S}_d = \mathbf{r} d^3 v \dot{\mathbf{d}} \mathbf{F}_d \hat{\mathbf{e}}_d \quad 3.40$$

dove:

$$\hat{\mathbf{e}}_d = \frac{\frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} - \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt}}{\left| \frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} - \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} \right|} \quad 3.41$$

e \mathbf{F}_d è una funzione la cui espressione dipende dalla forma del proiettile e dal materiale costituente la sua superficie. Nella 3.41 le derivate si intendono calcolate relativamente al sistema di riferimento inerziale $\{\mathbf{P}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\}$. Il modello d'interazione aria-proiettile che prevede la forza \mathbf{S}_d (e numerose altre forze minori tutte ampiamente trascurabili), si basa sull'ipotesi che le azioni aerodinamiche dipendano oltre che dai parametri del moto da noi considerati anche dalle loro derivate rispetto al tempo. Tutte le forze previste da questo modello che non sono previste dal modello da noi considerato sono, come si è detto, trascurabili. Fa tuttavia concettualmente eccezione la forza \mathbf{S}_d perché si somma ad \mathbf{S} ed i riscontri sperimentali possono solo mostrare che è trascurabile la somma di tali forze. Per meglio caratterizzare \mathbf{S}_d , osserviamo che la variazione dell'angolo \mathbf{d} può dipendere da due fattori: la rotazione dell'asse x' dovuta al vettore $\bar{\mathbf{w}}'$ e la variazione di direzione di \mathbf{v} , associata al moto del centro di massa del proiettile. Chiaramente, per piccole variazioni $d\hat{\mathbf{x}}'$ e $d\hat{\mathbf{v}}$ dei versori $\hat{\mathbf{x}}'$ e $\hat{\mathbf{v}}$ anche la variazione $d\mathbf{d}$ dell'angolo \mathbf{d} è piccola e si può considerare data dalla differenza di

$d\hat{\mathbf{x}}'$ ed $d\hat{\mathbf{v}}$. Resta quindi giustificato il fatto che:

$$\left| \frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} - \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} \right| = \mathbf{d} \quad 3.42$$

Avvalendoci della 3.42 scriviamo allora la 3.40 nel modo seguente:

$$\mathbf{S}_d = \mathbf{r} d^3 v \mathbf{F}_d \left(\frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} - \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} \right) \quad 3.43$$

La relazione ora ottenuta consente, in virtù della 3.36, di confrontare \mathbf{S}_d con la forza \mathbf{S} . Chiaramente, la forza \mathbf{S}_d agisce praticamente nella stessa direzione di \mathbf{S} se è costantemente:

$$\frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} - \frac{d\hat{\mathbf{v}}}{dt} \approx \frac{d\hat{\mathbf{x}}'}{dt} \quad 3.44$$

Ma questa situazione risulta effettivamente verificata nel caso dei proiettili senza alettature, quindi possiamo concludere che nei casi di nostro interesse, l'azione complessiva sul proiettile nella direzione del versore:

$$\hat{\mathbf{e}}_s = \frac{\bar{\mathbf{w}}' \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{|\bar{\mathbf{w}}' \wedge \hat{\mathbf{x}}'|} \quad 3.45$$

risulta la seguente:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{r} d^3 v (\bar{\mathbf{w}}' \mathbf{F}_s^{(G)} + \mathbf{d} \mathbf{F}_d) \hat{\mathbf{e}}_s \quad 3.46$$

E' da osservare però che nell'ipotesi della 3.44 la variazione dell'angolo di attacco \mathbf{d} è prodotta unicamente dalla variazione di direzione dell'asse del proiettile e quindi:

$$\mathbf{d} = \bar{\mathbf{w}}' \quad 3.47$$

Ne segue che la forza complessiva agente sul proiettile lungo la direzione $\hat{\mathbf{e}}_s$ risulta in pratica unicamente caratterizzata dal vettore $\bar{\mathbf{w}}'$ nella forma 3.30, come previsto dal modello d'interazione aria-proiettile da noi adottato. Ciò giustifica pienamente l'utilizzo della 3.30 per definire la forza \mathbf{S} . E' inoltre da tenere presente che i valori sperimentalmente ottenuti del coefficiente di pitch damping da usarsi nella 3.30, forniscono in pratica la caratterizzazione esatta di questa forza.

(4) Sbandamento Laterale

Lo Sbandamento Laterale \mathbf{E}_d è, come il Pitch Damping \mathbf{S} , una componente in generale trascurabile della forza aerodinamica \mathbf{F}_a ma che è opportuno considerare per completezza e perché il momento che ne risulta associato riveste un ruolo importante per la stabilità del moto del proiettile.⁽⁶⁾ Essa ca-

⁶⁾ Lo Sbandamento Laterale \mathbf{E}_d che nel caso dei proiettili, come si è detto, è una forza in generale trascurabile, risulta invece una delle forze aerodinamiche più importanti quando si considera il moto nell'aria di sfere dotate di un rapido moto rotatorio, come ad esempio succede spesso con i palloni da calcio o le palle da tennis. Tale forza infatti è la causa

ratterizza la componente principale della forza dovuta al cosiddetto effetto Magnus, cioè la forza che si genera su un corpo animato da moto rotatorio quando il corpo è investito da una corrente d'aria traslatoria non costantemente allineata al suo asse d'istantanea rotazione. Ricordiamo che L'effetto Magnus è il risultato della interazione viscosa tra l'aria e la superficie del corpo rotante. Infatti quando un corpo rotante è investito da una corrente d'aria traslatoria, la rotazione del corpo provoca, per adesione, la rotazione dell'aria che si trova ad immediato contatto con la sua superficie e il moto circolatorio si propaga, per effetto della viscosità, a tutta l'aria vicina. La corrente traslatoria viene quindi trascinata in rotazione e si produce una distribuzione di velocità non simmetrica sulla superficie del corpo. Per il teorema di Bernulli anche la pressione sulla superficie del corpo è allora non simmetrica e la sua risultante è una forza agente sul corpo. Chiaramente, la forza complessiva che agisce su un proiettile dovuta all'effetto Mgnus, \mathbf{F}_{Mag} , dipende sia da \mathbf{v} e da $\bar{\mathbf{w}}$ ed è non nulla solo se $\mathbf{v} \wedge \bar{\mathbf{w}} \neq 0$. Tuttavia nel caso dei proiettili senza alettature (che sono solidi di rotazione) tale forza, con l'impostazione da noi adottata per caratterizzare \mathbf{F}_a , si può sempre pensare costituita da due componenti: una, principale $\mathbf{F}_{Mag}^{(W)}$, associata alla sola rotazione assiale, cioè supponendo nulla la rotazione trasversale e quindi ponendosi nelle medesime condizioni relative alla definizione del Drag \mathbf{R} e del Lift \mathbf{L} , ed una, secondaria $\mathbf{F}_{Mag}^{(W, \bar{w}')}$, introdotta per tenere conto della rotazione trasversale $\bar{\mathbf{w}}'$. Lo Sbandamento Laterale \mathbf{E}_d è proprio la forza $\mathbf{F}_{Mag}^{(W)}$. Ovviamente, \mathbf{E}_d è non nulla solo se oltre ad essere $v \neq 0$ è anche $\mathbf{W} \neq 0$ e $\mathbf{d} \neq 0$. Per ragioni di simmetria poi tale forza deve essere ortogonale al piano formato dall'asse x' e dal vettore \mathbf{v} (cioè al piano Σ_d), ed il suo verso deve risultare opposto a quello del vettore $\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'$. Ai proiettili infatti è imposta una rotazione assiale in senso orario e quindi oraria è anche la rotazione dell'aria adiacente alla superficie del proiettile: quando il campo circolatorio si somma a quello traslatorio la distribuzione di velocità dell'aria sulla superficie del proiettile risulta allora maggiore nella direzione opposta a quella del vettore $\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'$. Ricordando l'espressione generale che secondo il modello d'interazione aria-proiettile da noi adottato deve avere una forza aerodinamica, in base a quanto precede si è quindi condotti ad assumere (in analogia alla 3.2 e 3.9):

$$\mathbf{E}_d = \mathbf{r} d^3 v W \sin|\mathbf{d}| F_{E_d}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \quad 3.48$$

dove:

$$\hat{\mathbf{e}}_{E_d} = \frac{\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{|\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'|} \quad 3.49$$

e F_{E_d} è una funzione la cui espressione dipende dalla forma del proiettile e dal materiale costituente la sua superficie (è chiaro infatti che F_{E_d} , al pari di F_R e F_L , non può dipendere dalla posizione del centro di massa). Tale funzione prende il nome di *coefficiente di sbandamento laterale* e per quanto si è detto sull'orientazione di \mathbf{E}_d , risulta negativa. Essa inoltre assume di norma valori piccoli. Tenendo conto che nella 3.48 compare anche il fattore $\sin|\mathbf{d}|$, il cui valore deve considerarsi sempre molto piccolo, risulta quindi evidente come la forza \mathbf{E}_d si possa effettivamente di norma trascurare. L'esperienza mostra che la forza \mathbf{E}_d è applicata in un opportuno punto C_{E_d} dell'asse del proiettile, la cui distanza dall'estremità anteriore del proiettile indicheremo con l_{E_d} e la cui ordinata x' indi-

principale della deviazione laterale della traiettoria cioè di quello che viene comunemente detto "effetto". Per maggiori dettagli su questo punto si rimanda a M. G. Busato, "Dinamica del Volo dei Palloni da Calcio", mgbstudio.net.

cheremo con x'_{E_d} . Il valore di l_{E_d} dipende dalla forma del proiettile e dal suo assetto di volo. Per i proiettili del tipo da noi considerato (senza alettature) risulta che il punto C_{E_d} si colloca, almeno per le velocità supersoniche, dietro a G, si ha cioè, almeno in campo supersonico, $x'_{E_d} < 0$. In Figura 3.10 è illustrato quanto ora detto proprio in questa situazione. E' da rilevare però che di norma per le tipologie di proiettile più comuni, in campo subsonico il punto C_{E_d} tende a collocarsi anteriormente a G.

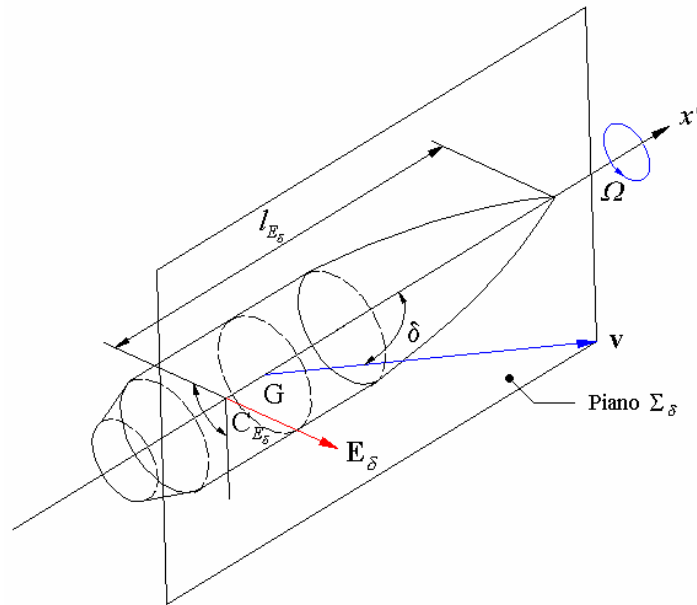


Figura 3.10

Nella seguente Figura 3.11 è mostrato schematicamente il meccanismo che porta alla formazione della forza E_d ed il motivo per il quale il suo verso è opposto a quello del vettore $\hat{v} \wedge \hat{x}'$. Il campo di velocità dell'aria sulla superficie del proiettile risulta infatti di maggiore intensità dove il flusso circolatorio si somma a quello traslatorio, ed è quindi in questa regione della superficie del proiettile che, per il teorema di Bernulli, la pressione risulta minore. La risultante delle pressioni sul proiettile è dunque diretta verso di essa.

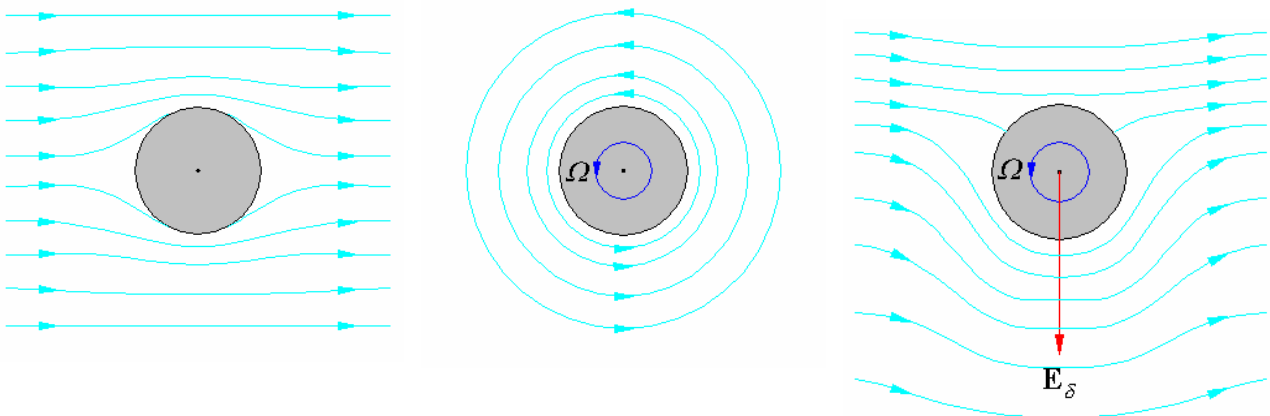


Figura 3.11

Sebbene in linea di principio F_{E_d} debba essere una funzione di M, R_e, P_w, \mathbf{d} , dalle osservazioni sperimentali risulta che tale funzione per le velocità tipiche dei proiettili dipende praticamente solo da M, R_e e \mathbf{d} (mentre a velocità molto basse si ha anche una dipendenza importante da P_w). Tenendo conto che di norma risulta anche lecito trascurare la dipendenza da R_e , si può quindi in generale assumere:

$$F_{E_d} = F_{E_d}(M, \mathbf{d}) \quad 3.50$$

dove $F_{E_d}(M, \mathbf{d})$ è una funzione negativa. L'esperienza mostra che spesso una soddisfacente approssimazione di F_{E_d} in campo balistico si ottiene nella forma seguente:

$$F_{E_d} = F_{E_d}^0(M) + F_{E_d}^1(M) \sin^2 \mathbf{d} \quad 3.51$$

dove $F_{E_d}^0(M), F_{E_d}^1(M)$ sono entrambe funzioni negative, dette rispettivamente *coefficiente lineare di sbandamento laterale* e *coefficiente cubico di sbandamento laterale*. In alcuni casi inoltre è anche possibile considerare F_{E_d} indipendente da \mathbf{d} è quindi assumere $F_{E_d} = F_{E_d}^0(M)$. Non sempre però la dipendenza da \mathbf{d} può essere esplicitata nella forma 3.51. Non lo è ad esempio nel caso del proiettile d'artiglieria "Tipo M1" da 105 mm (al quale si riferiscono i diagrammi di Figura 3.3, Figura 3.4, Figura 3.6 e Figura 3.7). A titolo d'esempio, in Figura 3.12 è riportato, per due diversi valori dell'angolo di attacco, il grafico della funzione F_{E_d} relativa proprio a questo proiettile.

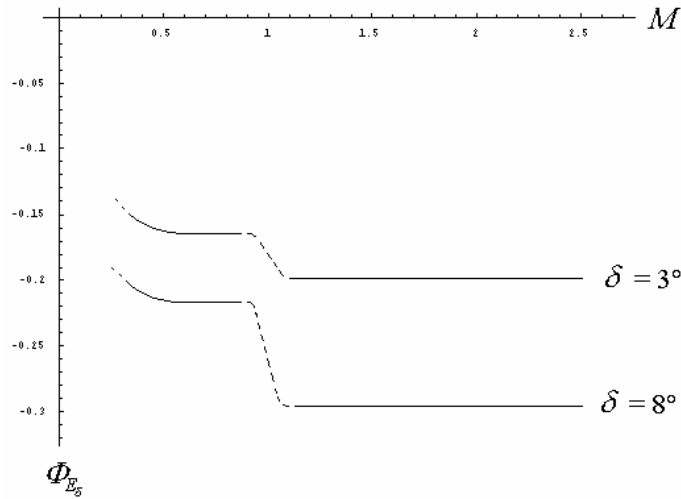


Figura 3.12

Chiaramente, poiché:

$$|\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}| = \sin|\mathbf{d}| \quad 3.52$$

la 3.48 può anche scriversi nel modo seguente:

$$\mathbf{E}_d = \mathbf{r} d^3 \nu \mathbf{W} F_{E_d}(M, R_e, P_w, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}' \quad 3.53$$

dove non compare esplicitamente il fattore $\sin|\mathbf{d}|$. Tale fattore è comunque conglobato nel vettore

$\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'$ il cui modulo è $\sin|\mathbf{d}|$, come risulta dalla 3.52.

Concludiamo rilevando che in letteratura, come per i coefficienti di drag, di lift e di pitch damping, col nome “coefficiente di sbandamento laterale” viene spesso indicata non la funzione \mathbf{F}_{E_d} associata ad \mathbf{E}_d per mezzo della 3.48, ma una funzione ad essa proporzionale. E' questo ad esempio il caso in cui in luogo della 3.48 si assume per \mathbf{E}_d la seguente espressione (relativa alla stessa convenzione della 3.6, 3.16 e 3.37):

$$\mathbf{E}_d = \frac{1}{2} \mathbf{r} A d v W \sin|\mathbf{d}| C_{N_{wd}}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \quad 3.54$$

dove A è l'area della sezione frontale del proiettile:

$$A = \frac{\mathbf{p}}{4} d^2 \quad 3.55$$

Si ha allora manifestamente:

$$C_{N_{wd}} = \frac{8}{\mathbf{p}} \mathbf{F}_{E_d} \quad 3.56$$

(5) Sbandamento Trasversale

Lo Sbandamento Trasversale $\mathbf{E}_{w'}$ è la componente della forza aerodinamica \mathbf{F}_a che, nell'impostazione da noi adottata per caratterizzare \mathbf{F}_a , presenta minore rilevanza tant'è vero che può sempre essere trascurata. Noi la consideriamo per completezza in quanto nella scomposizione in fenomeni fisici elementari sulla quale è basata la nostra analisi della forza aerodinamica \mathbf{F}_a , tale forza è associata ad un fenomeno indipendente da quelli finora presi in considerazione, per cui tenerla in conto, almeno dal punto di vista teorico, è un'esigenza logica. Essa si identifica con la componente principale della forza $\mathbf{F}_{Mag}^{(W, \bar{w}')}$ introdotta a proposito dello Sbandamento Laterale \mathbf{E}_d e caratterizza l'effetto Magnus dovuto alla distribuzione di velocità locale dell'aria indotta, indipendentemente dall'avanzamento traslatorio del proiettile, dalla rotazione trasversale \bar{w}' . La forza $\mathbf{E}_{w'}$ quindi gioca relativamente ad \mathbf{E}_d lo stesso ruolo giocato da \mathbf{S} relativamente ad \mathbf{R} ed \mathbf{L} , ed al pari di \mathbf{S} , dipende anche dalla posizione del centro di massa G del proiettile. Nel caso dei proiettili senza alettature (che sono solidi di rotazione) la forza $\mathbf{E}_{w'}$ è ovviamente non nulla solo se $\mathbf{W} \neq 0$ e $\bar{w}' \neq 0$. Per ragioni di simmetria poi la forza $\mathbf{E}_{w'}$ deve essere ortogonale al piano passante per l'asse x' e perpendicolare al vettore \bar{w}' (che definisce l'asse d'istantanea rotazione trasversale). Essa quindi ha la direzione del vettore \bar{w}' stesso. Quanto al verso di $\mathbf{E}_{w'}$ nulla invece può dirsi in generale in quanto esso dipende dalla forma e dalla distribuzione interna delle masse del proiettile. Ricordando l'espressione generale che secondo il modello d'interazione aria-proiettile da noi adottato deve avere una forza aerodinamica, si è quindi condotti ad assumere:

$$\mathbf{E}_{w'} = \mathbf{r} d^4 W \bar{w}' \mathbf{F}_{E_{w'}}^{(G)}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{w'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \hat{\mathbf{e}}_{E_{w'}} \quad 3.57$$

dove:

$$\hat{\mathbf{e}}_{E_{\bar{w}'}} = \frac{\bar{\mathbf{w}'}}{|\bar{\mathbf{w}'}} \quad 3.58$$

e $F_{E_{\bar{w}'}}^{(G)}$ è una funzione la cui espressione dipende dalla forma del proiettile, dal materiale costituente la sua superficie e dalla posizione di G (come si è voluto mettere in evidenza apponendo ad essa l'apice "G"). Essa prende il nome di *coefficiente di sbandamento trasversale* e nulla può dirsi in generale circa il suo segno. Esso infatti dipende fortemente dalla tipologia del proiettile e dalla posizione del suo centro di massa. Per tale ragione non è neppure possibile indicarne un diagramma tipo. Inoltre, stante l'assoluta irrilevanza pratica della forza $\mathbf{E}_{\bar{w}'}$, nelle tavole che forniscono le caratteristiche aerodinamiche dei proiettili non vengono praticamente mai riportate indicazioni di questa funzione. Anche per la posizione del punto di applicazione della forza $\mathbf{E}_{\bar{w}'}$, nulla può dirsi in generale. Tale punto, che indicheremo con $C_{E_{\bar{w}'}}$, giace infatti sull'asse del proiettile ma la sua distanza $l_{E_{\bar{w}'}}$ dall'estremità anteriore del proiettile dipende fortemente dalla forma, dall'assetto di volo e dalla posizione del centro di massa del proiettile stesso. E' da rilevare però che tale punto, almeno per le velocità supersoniche, risulta di norma dietro a G e prossimo a C_{E_d} . In Figura 3.13 è illustrato quanto ora detto nell'ipotesi che sia $F_{E_{\bar{w}'}}^{(G)} < 0$ e $C_{E_{\bar{w}'}}$ dietro a G (come solitamente accade almeno a velocità supersoniche per la tipologia di proiettile indicata in figura).

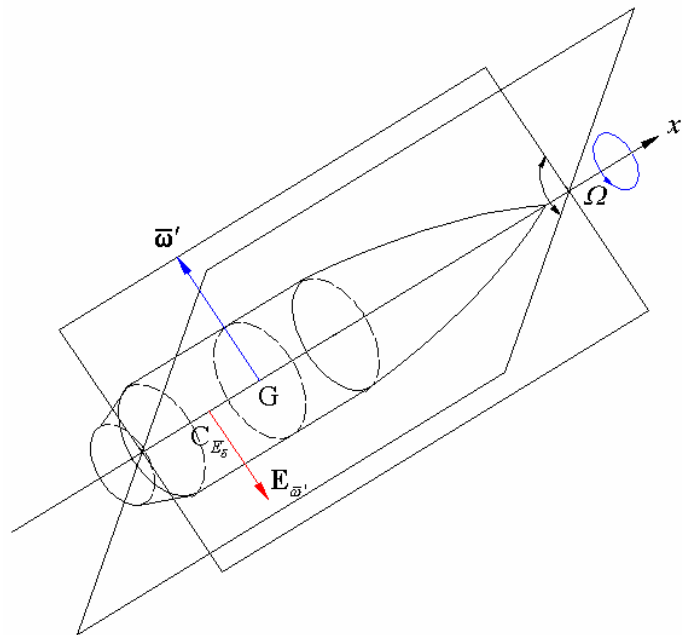


Figura 3.13

Come per il coefficiente di pitch damping $F_S^{(G)}$, anche per il coefficiente di sbandamento trasversale $F_{E_{\bar{w}'}}^{(G)}$ è possibile rappresentare in modo esplicito la dipendenza dalla posizione del centro di massa del proiettile. Si dimostra infatti la seguente formula, che consente di esprimere il coefficiente di sbandamento trasversale di un proiettile con centro di massa nel punto G', attraverso il coefficiente di sbandamento trasversale di un proiettile di identica forma e centro di massa in un punto G, diverso da G':

$$\mathbf{F}_{E_{\bar{w}'}}^{(G')} = \mathbf{F}_{E_{\bar{w}'}}^{(G)} + \frac{l_{G'} - l_G}{d} \mathbf{F}_{E_d} \quad 3.59$$

dove con $l_{G'}$ ed l_G si è indicata la distanza di G' e di G dalla estremità anteriore del proiettile, con d il calibro del proiettile e con \mathbf{F}_{E_d} il coefficiente di sbandamento laterale per la tipologia di proiettile considerata. La formula 3.59 è importante perché avvalendosi di essa è possibile ottenere il coefficiente di sbandamento trasversale di tutti i proiettili di medesima forma ma differente posizione del centro di massa quando è noto il coefficiente di sbandamento trasversale di un proiettile standard della forma considerata. Per maggiori dettagli su questo punto si rimanda a [2] ed alla bibliografia ivi riportata (nel Cap. 2).

Chiaramente, per la 3.58, la 3.57 può anche scriversi nel modo seguente:

$$\mathbf{E}_{\bar{w}'} = \mathbf{r} d^4 \mathbf{W} \mathbf{F}_{E_{\bar{w}'}} (M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{w}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \bar{\mathbf{w}}' \quad 3.60$$

dove non compare esplicitamente il fattore $\bar{\mathbf{w}}'$. Tale fattore è comunque conglobato nel vettore $\bar{\mathbf{w}}'$ il cui modulo è \bar{w}' .

Concludiamo rilevando che in letteratura, come per i coefficienti di drag, di lift, di pitch damping e di sbandamento laterale, col nome “coefficiente di sbandamento trasversale” viene spesso indicata non la funzione $\mathbf{F}_{E_{\bar{w}'}}$ associata ad $\mathbf{E}_{\bar{w}'}$ per mezzo della 3.57, ma una funzione ad essa proporzionale. E' questo ad esempio il caso in cui in luogo della 3.57 si assume per $\mathbf{E}_{\bar{w}'}$ la seguente espressione (relativa alla stessa convenzione della 3.6, 3.16, 3.37 e 3.54):

$$\mathbf{E}_{\bar{w}'} = \frac{1}{2} \mathbf{r} A d^2 \mathbf{W} \bar{\mathbf{w}}' C_{N_{\bar{w}'}} (M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{w}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \hat{\mathbf{e}}_{E_{\bar{w}'}} \quad 3.61$$

dove A è l'area della sezione frontale del proiettile:

$$A = \frac{\mathbf{p}}{4} d^2 \quad 3.62$$

Si ha allora manifestamente:

$$C_{N_{\bar{w}'}} = \frac{8}{\mathbf{p}} \mathbf{F}_{E_{\bar{w}'}}^{(G)} \quad 3.63$$

OSSERVAZIONE

Come si è detto, i coefficienti aerodinamici introdotti per caratterizzare le forze \mathbf{R} , \mathbf{L} , \mathbf{S} , \mathbf{E}_d ed $\mathbf{E}_{\bar{w}'}$, cioè \mathbf{F}_R , \mathbf{F}_L , $\mathbf{F}_S^{(G)}$, \mathbf{F}_{E_d} e $\mathbf{F}_{E_{\bar{w}'}}^{(G)}$, sono funzioni la cui espressione dipende dalla forma del proiettile e dal materiale costituente la sua superficie (nonché dalla posizione del centro di massa nel caso di $\mathbf{F}_S^{(G)}$ e $\mathbf{F}_{E_{\bar{w}'}}^{(G)}$). La dipendenza dal materiale della superficie risulta tuttavia sempre irrilevante in quanto essa è essenzialmente una funzione della rugosità, e la superficie dei proiettili, indipendentemente dal materiale, è sempre una superficie liscia. Possiamo quindi ritenere che \mathbf{F}_R , \mathbf{F}_L , \mathbf{F}_{E_d} siano funzioni esclusivamente della forma del proiettile e che $\mathbf{F}_S^{(G)}$, $\mathbf{F}_{E_{\bar{w}'}}^{(G)}$ siano funzioni della forma

del proiettile e della posizione del suo centro di massa. Nel seguito adotteremo sempre questa ipotesi.

4. CARATTERIZZAZIONE DEL MOMENTO ASSOCIATO AD \mathbf{F}_a

Chiaramente, nota la forza \mathbf{F}_a ed il suo punto di applicazione C_a , il momento $\tilde{\mathbf{M}}_a$ ad essa associato rispetto al centro di massa G del proiettile si può calcolare mediante la formula 1.8 che qui per comodità riscriviamo:

$$\tilde{\mathbf{M}}_a = (C_a - G) \wedge \mathbf{F}_a \quad 4.1$$

Questo modo di caratterizzare il momento $\tilde{\mathbf{M}}_a$ presenta tuttavia, come si è già accennato, alcuni svantaggi. Infatti, il punto C_a , che giace sull'asse del proiettile, si trova rispetto all'estremità anteriore del proiettile ad una distanza l_a che dipende oltre che dalla forma anche dall'assetto di volo e dalla posizione del centro di massa del proiettile stesso. Esso quindi risulta variabile nel tempo e, a parità di forma del proiettile, anche dalla distribuzione interna delle masse. Inoltre, la distanza l_G del baricentro G dall'estremità anteriore del proiettile dipende anch'essa ovviamente dalla distribuzione interna delle masse. Ne segue che il vettore:

$$C_a - G = (l_G - l_a) \hat{\mathbf{x}}' \quad 4.2$$

è in generale una funzione della forma, dei parametri del moto e della distribuzione delle masse interne del proiettile. Definire il momento $\tilde{\mathbf{M}}_a$ per mezzo della 4.1 non può quindi fornire una caratterizzazione del momento $\tilde{\mathbf{M}}_a$ che consenta di ottenere dei modelli balistici sufficientemente generali. Così facendo inoltre non sarebbe neppure possibile stabilire quali eventuali semplificazioni sia possibile in generale adottare senza commettere errori grossolani. Si preferisce allora caratterizzare il momento $\tilde{\mathbf{M}}_a$ sulla falsa riga di quanto si è fatto per la forza \mathbf{F}_a e per il momento intrinseco \mathbf{M}_a , ovvero introducendo opportuni coefficienti aerodinamici, determinabili poi per via sperimentale. La cosa è resa ancora più facile utilizzando lo stesso schema adottato per \mathbf{F}_a . Infatti, assumendo conformemente alla 3.1:

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{R} + \mathbf{L} + \mathbf{S} + \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_w \quad 4.3$$

potremo senz'altro scrivere:

$$\tilde{\mathbf{M}}_a = \mathbf{M}_R + \mathbf{M}_L + \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_{E_d} + \mathbf{M}_{E_w} \quad 4.4$$

dove con \mathbf{M}_R , \mathbf{M}_L , \mathbf{M}_S , \mathbf{M}_{E_d} , \mathbf{M}_{E_w} si sono indicati i momenti rispettivamente associati \mathbf{R} , \mathbf{L} , \mathbf{S} , \mathbf{E}_d ed \mathbf{E}_w . A tale proposito è opportuno osservare che il momento $\mathbf{M}_R + \mathbf{M}_L$ risulta manifestamente individuato dalla sola forza normale \mathbf{N} definita dalla 3.20, per cui in luogo della 4.4 è uso assumere:

$$\tilde{\mathbf{M}}_a = \mathbf{M}_N + \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_{E_d} + \mathbf{M}_{E_w} \quad 4.5$$

I quattro momenti ora introdotti vengono normalmente così indicati:

- \mathbf{M}_N Momento Ribaltante (associato al Lift \mathbf{L} e in minima parte al Drag \mathbf{R})
- \mathbf{M}_S Momento di Pitch Damping (associato al Pitch Damping \mathbf{S})
- \mathbf{M}_{E_d} Momento di Sbandamento Laterale (associato allo Sbandamento Laterale \mathbf{E}_d)
- \mathbf{M}_{E_w} Momento di Sbandamento Trasversale (associato allo Sbandamento Trasversale \mathbf{E}_w)

Non tutti i momenti considerati hanno però la stessa rilevanza, alcuni infatti possono in alcuni casi essere trascurati o producono solo effetti perturbativi. Analizziamo ora più in dettaglio i momenti testé introdotti, anche alla luce di quanto esposto nel Paragrafo 3.

(1) Momento Ribaltante

Il Momento Ribaltante \mathbf{M}_N è la componente del momento $\tilde{\mathbf{M}}_a$ associata al Lift \mathbf{L} ed al Drag \mathbf{R} (quest'ultimo in minima parte, in quanto dovendo essere l'angolo di attacco \mathbf{d} sempre piccolo \mathbf{R} è praticamente allineato all'asse del proiettile). Esso influisce notevolmente sulla stabilità del moto del proiettile e nei modelli balistici in cui si considera l'azione del Lift \mathbf{L} deve sempre essere preso in considerazione. Per definizione:

$$\mathbf{M}_N = (l_G - l_R) \hat{\mathbf{x}}' \wedge \mathbf{N} \quad 4.6$$

ed è facile verificare guardando la Figura 3.8 che:

$$\frac{\hat{\mathbf{x}}' \wedge \mathbf{N}}{|\hat{\mathbf{x}}' \wedge \mathbf{N}|} = \frac{\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{|\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'|} \equiv \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \quad 4.7$$

(il versore $\hat{\mathbf{e}}_{E_d}$ è stato introdotto con la 3.49). Così la 4.6 si può scrivere:

$$\mathbf{M}_N = (l_G - l_R) |\hat{\mathbf{x}}' \wedge \mathbf{N}| \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \quad 4.8$$

Ma (v. 3.23 e 3.24):

$$|\hat{\mathbf{x}}' \wedge \mathbf{N}| = |\mathbf{N}| \equiv N = R \sin |\mathbf{d}| + L \cos \mathbf{d} \quad 4.9$$

per cui dalla 4.8 si trae:

$$\mathbf{M}_N = (l_G - l_R) (R \sin |\mathbf{d}| + L \cos \mathbf{d}) \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \quad 4.10$$

ovvero, ricordando la 3.2 e la 3.9 che forniscono la caratterizzazione di R ed L :

$$\mathbf{M}_N = (l_G - l_R) \mathbf{r} d^2 v^2 \sin |\mathbf{d}| [\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L \cos \mathbf{d}] \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \quad 4.11$$

Ponendo:

$$\frac{l_G - l_R}{d} [\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L \cos \mathbf{d}] = \mathbf{F}_{M_N}^{(G)} \quad 4.12$$

siamo così condotti ad assumere la seguente rappresentazione per il momento ribaltante \mathbf{M}_N :

$$\mathbf{M}_N = r d^3 v^2 \sin |d| \mathbf{F}_{M_N}^{(G)}(M, R_e, \mathbf{P}_W, d) \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \quad 4.13$$

dove:

$$\hat{\mathbf{e}}_{E_d} = \frac{\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{|\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'|} \quad 4.14$$

e $\mathbf{F}_{M_N}^{(G)}$ è una funzione la cui espressione dipende dalla forma e dalla distribuzione interna delle masse del proiettile (come si è voluto mettere in evidenza apponendo ad essa l'apice "G").⁽⁷⁾ Essa prende il nome di *coefficiente di momento ribaltante* e come si evince dalla 4.12, il suo valore dipende da \mathbf{F}_R , \mathbf{F}_L e dal fattore $l_G - l_R$. Poiché $l_G - l_R$ è una funzione indipendente da \mathbf{F}_R e \mathbf{F}_L , il coefficiente $\mathbf{F}_{M_N}^{(G)}$ risulta effettivamente un nuovo coefficiente aerodinamico. Come si è detto, nel caso dei proiettili senza alettature è $l_G - l_R > 0$. Dunque essendo \mathbf{F}_R e \mathbf{F}_L entrambi positivi e \mathbf{F}_R sensibilmente minore di \mathbf{F}_L , risulta $\mathbf{F}_{M_N}^{(G)} > 0$. Il momento \mathbf{M}_N per i proiettili di nostro interesse produce quindi una rotazione dell'asse del proiettile nel piano Σ_d che tende sempre ad aumentare l'angolo d . La seguente Figura 4.1 illustra quanto ora detto.

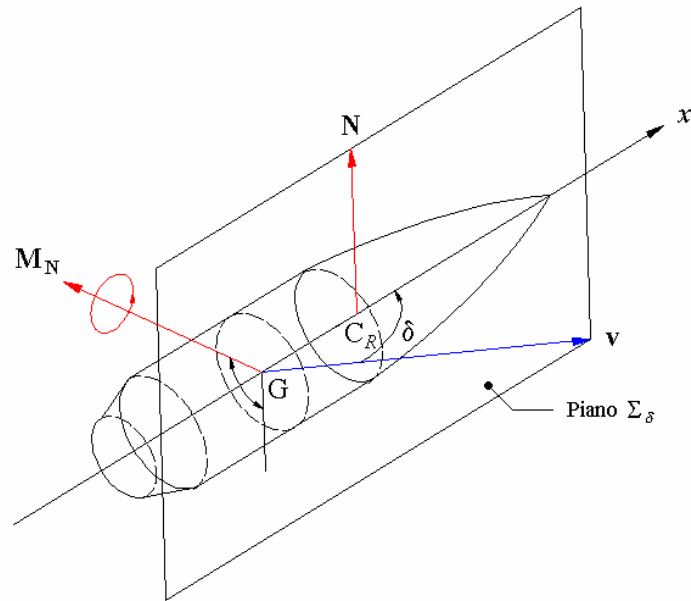


Figura 4.1

Chiaramente, l'azione del momento \mathbf{M}_N sui proiettili senza alettature come quelli da noi considerati, ha un effetto destabilizzante. Esso infatti come si è visto produce un aumento dell'angolo di attacco d . E' per questa ragione che ai proiettili senza alettature si impone una rotazione oraria. Tale rotazione infatti contrasta l'azione di \mathbf{M}_N con l'effetto giroscopio. Vale la pena a questo proposito rilevare che per i proiettili con alettatura posteriore risulta invece $l_G - l_R < 0$. In questo caso quindi \mathbf{M}_N è un momento stabilizzante. Dunque l'alettatura posteriore crea un effetto stabilizzante analogo a quello della rotazione assiale.

⁷⁾ Tralasciamo, come si è detto, la dipendenza di $\mathbf{F}_{M_N}^{(G)}$ dal tipo di materiale costituente la superficie del proiettile.

Sebbene in linea di principio $F_{M_N}^{(G)}$ debba essere una funzione di M, R_e, P_w, \mathbf{d} , dalle osservazioni sperimentali risulta che tale funzione dipende praticamente solo da M, R_e e \mathbf{d} . Tenendo conto che di norma risulta lecito trascurare anche la dipendenza da R_e , si può quindi in generale assumere:

$$F_{M_N}^{(G)} = F_{M_N}^{(G)}(M, \mathbf{d}) \quad 4.15$$

Chiaramente, $F_{M_N}^{(G)}(M, \mathbf{d})$ deve essere una funzione positiva. L'esperienza mostra che una soddisfacente approssimazione di $F_{M_N}^{(G)}$ si ottiene nella forma seguente:

$$F_{M_N}^{(G)} = F_{M_N}^{(G)0}(M) + F_{M_N}^{(G)1}(M) \sin^2 \mathbf{d} \quad 4.16$$

dove $F_{M_N}^{(G)0}(M)$ è senz'altro una funzioni positiva. Poiché, per evidenti ragioni, l'angolo \mathbf{d} deve mantenersi costantemente piccolo, nei modelli balistici più semplificati è lecito trascurare la dipendenza di $F_{M_N}^{(G)}$ da \mathbf{d} e quindi assumere:

$$F_{M_N}^{(G)} = F_{M_N}^{(G)0}(M) \quad 4.17$$

La funzione $F_{M_N}^{(G)0}(M)$ prende il nome di *coefficiente lineare di momento ribaltante* ed il suo diagramma nel caso di tre proiettili standard di tipo G6 ma con differente posizione del centro di massa, è indicato in Figura 4.2.

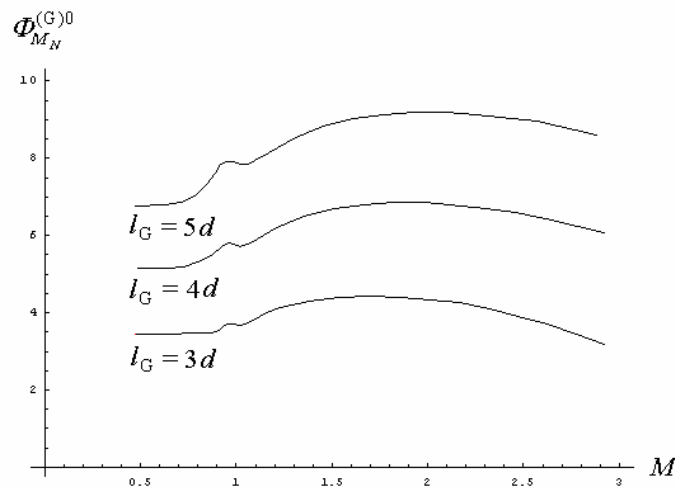


Figura 4.2

In Figura 4.3 e Figura 4.4 è riportato invece, a titolo d'esempio, il diagramma dei coefficienti $F_{M_N}^{(G)0}(M)$ e $F_{M_N}^{(G)1}(M)$ del proiettile d'artiglieria "Tipo M1" da 105mm al quale si riferiscono anche i diagrammi di Figura 3.3, Figura 3.4, Figura 3.6, Figura 3.7 e Figura 3.12.

Come nel caso dei coefficienti aerodinamici $F_S^{(G)}$ e $F_{E_w}^{(G)}$, anche per il coefficiente $F_{M_N}^{(G)}$ la dipendenza dalla posizione del centro di massa può essere rappresentata in modo esplicito. Si dimostra infatti la seguente formula, che consente di esprimere il coefficiente di momento ribaltante di un

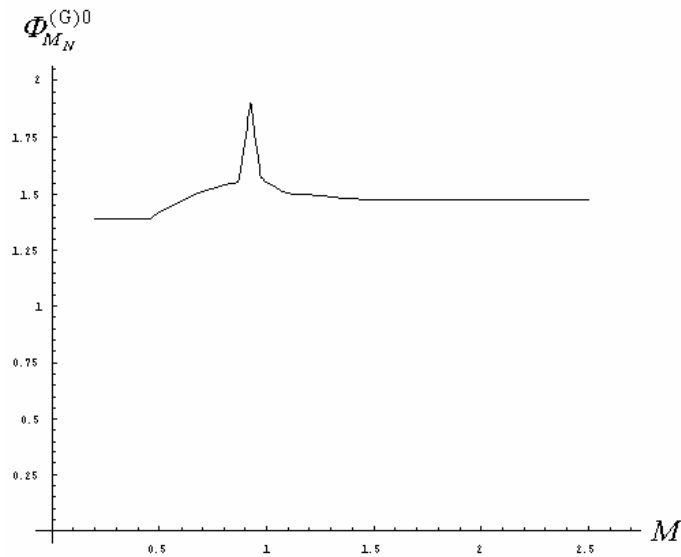


Figura 4.3

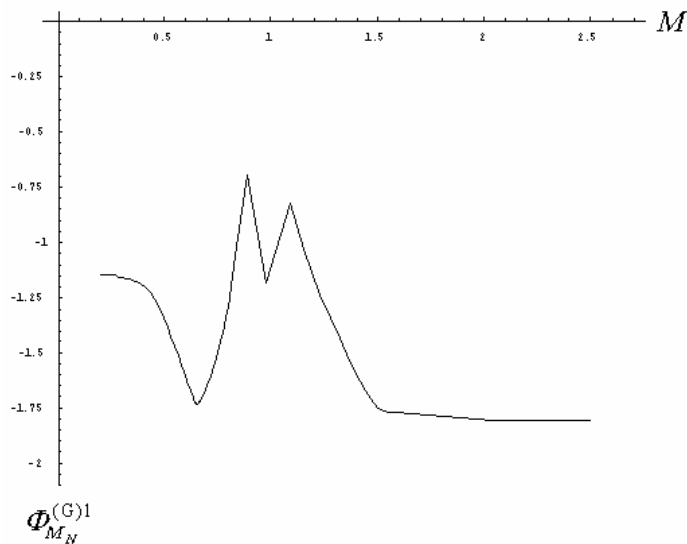


Figura 4.4

proiettile con centro di massa nel punto G' , attraverso il coefficiente di momento ribaltante di un proiettile di identica forma e centro di massa in un punto G , diverso da G' :

$$\mathbf{F}_{M_N}^{(G')} = \mathbf{F}_{M_N}^{(G)} + \frac{l_{G'} - l_G}{d} \mathbf{F}_N \quad 4.18$$

dove con $l_{G'}$ ed l_G si è indicata la distanza di G' e di G dalla estremità anteriore del proiettile, con d il calibro del proiettile e con \mathbf{F}_N il coefficiente aerodinamico normale relativo alla tipologia di proiettile considerata (v. 3.22). La formula 4.18 è importante perché avvalendosi di essa è possibile ottenere il coefficiente di momento ribaltante di tutti i proiettili di medesima forma ma differente posizione del centro di massa, quando è noto il coefficiente di momento ribaltante di un proiettile standard della forma considerata. Per maggiori dettagli su questo punto si rimanda a [2] ed alla bibliografia ivi riportata (nel Cap. 2).

Chiaramente, poiché:

$$|\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'| = \sin|\mathbf{d}| \quad 4.19$$

la 4.13 può anche scriversi nel modo seguente:

$$\mathbf{M}_N = \mathbf{r} d^3 v^2 \mathbf{F}_{M_N}^{(G)}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{w}}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}' \quad 4.20$$

dove non compare esplicitamente il fattore $\sin|\mathbf{d}|$. Tale fattore è comunque conglobato nel vettore $\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'$ il cui modulo è $\sin|\mathbf{d}|$, come risulta dalla 4.19.

Concludiamo rilevando che in letteratura col nome “coefficiente di momento ribaltante” viene spesso indicata non la funzione $\mathbf{F}_{M_N}^{(G)}$ associata ad \mathbf{M}_N per mezzo della 4.13, ma una funzione ad essa proporzionale. E' questo ad esempio il caso in cui in luogo della 4.13 si assuma per \mathbf{M}_N la seguente espressione (relativa alla stessa convenzione della 3.6, 3.16, 3.37, 3.54 e 3.61):

$$\mathbf{M}_N = \frac{1}{2} \mathbf{r} A d v^2 \sin|\mathbf{d}| C_{M_d}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{w}}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \quad 4.21$$

dove A è l'area della sezione frontale del proiettile:

$$A = \frac{\mathbf{p}}{4} d^2 \quad 4.22$$

Si ha allora manifestamente:

$$C_{M_d} = \frac{8}{\mathbf{p}} \mathbf{F}_{M_N}^{(G)} \quad 4.23$$

OSSERVAZIONE

Si noti che il momento ribaltante \mathbf{M}_N è, come si è detto, principalmente dovuto al solo Lift \mathbf{L} . Infatti essendo \mathbf{F}_R sensibilmente minore di \mathbf{F}_L e $\mathbf{d} \ll 1$, si ha $\mathbf{F}_R + \mathbf{F}_L \cos \mathbf{d} \approx \mathbf{F}_L$ per cui dalla 4.12 risulta $\mathbf{F}_{M_N}^{(G)} \approx \frac{l_G - l_R}{d} \mathbf{F}_L$.

(2) Momento di Pitch Damping

Il Momento di Pitch Damping \mathbf{M}_S è la componente del momento $\tilde{\mathbf{M}}_a$ associata al Pitch Damping \mathbf{S} . Esso ha un'azione importante sulla stabilità del moto del proiettile e nei modelli balistici in cui si considera l'azione del Lift \mathbf{L} (e quindi del momento ribaltante \mathbf{M}_N) deve sempre essere preso in considerazione (assieme al momento di sbandamento laterale \mathbf{M}_{E_d}). Per definizione:

$$\mathbf{M}_S = (l_G - l_S) \hat{\mathbf{x}}' \wedge \mathbf{S} \quad 4.24$$

dove con l_S si è indicata la distanza del punto di applicazione C_S della forza \mathbf{S} dalla estremità ante-

riore del proiettile. Ricordando la 3.30 che forniscono la caratterizzazione di \mathbf{S} , la 4.24 diviene:

$$\mathbf{M}_S = (l_G - l_S) \mathbf{r} d^3 v \bar{\mathbf{w}}' \mathbf{F}_S^{(G)} \hat{\mathbf{x}}' \wedge \hat{\mathbf{e}}_S \quad 4.25$$

Ma, conformemente alle 3.31, 3.33 e 3.58:

$$\hat{\mathbf{x}}' \wedge \hat{\mathbf{e}}_S \equiv \hat{\mathbf{x}}' \wedge \frac{\bar{\mathbf{w}}' \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{|\bar{\mathbf{w}}' \wedge \hat{\mathbf{x}}'|} = \frac{\bar{\mathbf{w}}'}{|\bar{\mathbf{w}}'|} \equiv \hat{\mathbf{e}}_{E_{\bar{\mathbf{w}}'}} \quad 4.26$$

per cui dalla 4.25 si trae:

$$\mathbf{M}_S = (l_G - l_S) \mathbf{r} d^3 v \bar{\mathbf{w}}' \mathbf{F}_S^{(G)} \hat{\mathbf{e}}_{E_{\bar{\mathbf{w}}'}} \quad 4.27$$

Ponendo:

$$\frac{l_G - l_S}{d} \mathbf{F}_S^{(G)} = \mathbf{F}_{M_S}^{(G)} \quad 4.28$$

siamo così condotti ad assumere la seguente rappresentazione per il momento di Pitch Damping \mathbf{M}_S :

$$\mathbf{M}_S = \mathbf{r} d^4 v \bar{\mathbf{w}}' \mathbf{F}_{M_S}^{(G)} (M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{w}}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \hat{\mathbf{e}}_{E_{\bar{\mathbf{w}}'}} \quad 4.29$$

dove:

$$\hat{\mathbf{e}}_{E_{\bar{\mathbf{w}}'}} = \frac{\bar{\mathbf{w}}'}{|\bar{\mathbf{w}}'|} \quad 4.30$$

e $\mathbf{F}_{M_S}^{(G)}$ è una funzione la cui espressione dipende dalla forma e dalla distribuzione interna delle masse del proiettile (come si è voluto mettere in evidenza apponendo ad essa l'apice "G").⁽⁸⁾ Essa prende il nome di *coefficiente di momento di pitch damping* e come si evince dalla 4.28, dipende da \mathbf{F}_S e dal fattore $l_G - l_S$. Poiché $l_G - l_S$ è una funzione indipendente da \mathbf{F}_S , il coefficiente $\mathbf{F}_{M_S}^{(G)}$ risulta effettivamente un nuovo coefficiente aerodinamico. Come si è detto a proposito della forza \mathbf{S} , non è possibile stabilire in generale il segno di $\mathbf{F}_S^{(G)}$ ed $l_G - l_S$, anche se di norma, per le più comuni tipologie di proiettile a velocità supersoniche è $\mathbf{F}_S^{(G)} < 0$ ed $l_G - l_S > 0$. La 4.28 non consente quindi di fornire una caratterizzazione generale della funzione $\mathbf{F}_{M_S}^{(G)}$. L'esperienza mostra comunque che tale funzione per i proiettili di forma ordinaria è comunque sempre negativa, si ha cioè $\mathbf{F}_{M_S}^{(G)} < 0$. Valori positivi di $\mathbf{F}_{M_S}^{(G)}$ si sono osservati solo nel caso di alcune particolari tipologie di proiettile a velocità transoniche e subsoniche. Supponendo $\mathbf{F}_{M_S}^{(G)} < 0$, il momento \mathbf{M}_S produce una rotazione dell'asse del proiettile nel piano ortogonale al vettore $\bar{\mathbf{w}}'$, che si oppone alla rotazione esistente (la cui velocità è rappresentata dal vettore $\bar{\mathbf{w}}'$). Chiaramente, se $\bar{\mathbf{w}}'$ è ortogonale al piano Σ_d l'azione del momento \mathbf{M}_S tende allora a diminuire l'angolo \mathbf{d} . In questo caso quindi il momento \mathbf{M}_S produ-

⁸⁾ Tralasciamo, come si è detto, la dipendenza di $\mathbf{F}_{M_S}^{(G)}$ dal tipo di materiale costituente la superficie del proiettile.

ce un effetto stabilizzante. La seguente Figura 4.5 illustra quanto ora detto nell'ipotesi che sia $F_S^{(G)} < 0$ ed $l_G - l_S > 0$.

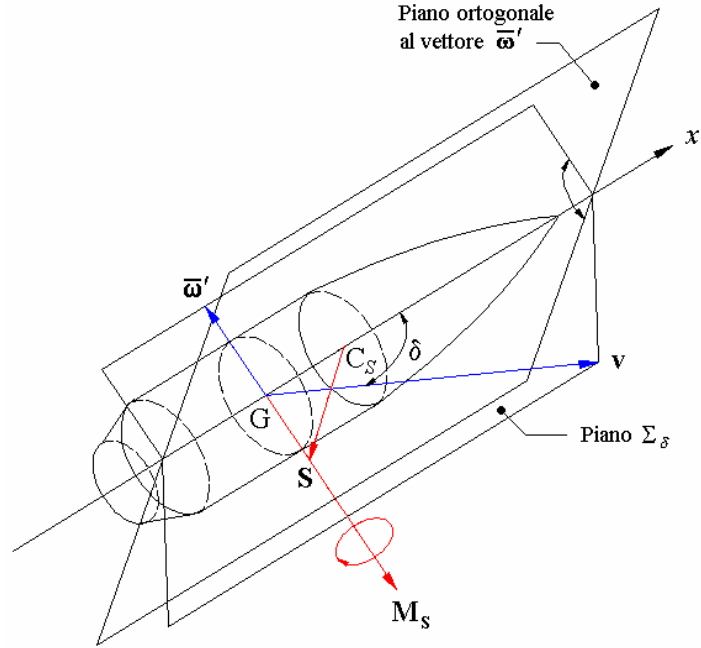


Figura 4.5

Sebbene in linea di principio $F_{M_S}^{(G)}$ debba essere una funzione di M, R_e, P_w, P_w', d, a , dalle osservazioni sperimentali risulta che tale funzione dipende praticamente solo da M, R_e e d . Tenendo conto che di norma risulta lecito trascurare anche la dipendenza da R_e , si può quindi in generale assumere:

$$F_{M_S}^{(G)} = F_{M_S}^{(G)}(M, d) \quad 4.31$$

Come si è detto, $F_{M_S}^{(G)}(M, d)$ sarà di norma una funzione negativa. L'esperienza mostra che una soddisfacente approssimazione di $F_{M_S}^{(G)}$ si può spesso ottenere nella forma seguente:

$$F_{M_S}^{(G)} = F_{M_S}^{(G)0}(M) + F_{M_S}^{(G)1}(M) \sin^2 d \quad 4.32$$

dove almeno $F_{M_S}^{(G)0}(M)$ è di norma una funzione negativa. Poiché, per evidenti ragioni, l'angolo d deve mantenersi costantemente piccolo, nei modelli balistici più semplificati è spesso lecito trascurare anche la dipendenza di $F_{M_S}^{(G)}$ da d e quindi assumere:

$$F_{M_S}^{(G)} = F_{M_S}^{(G)0}(M) \quad 4.33$$

La funzione $F_{M_S}^{(G)0}(M)$ prende il nome di *coefficiente lineare di momento di pitch damping*. In Figura 4.6 di pagina seguente è riportato a titolo d'esempio il diagramma della funzione $F_{M_S}^{(G)0}(M)$ nel

caso del proiettile d'artiglieria "Tipo M1" da 105 mm, al quale si riferiscono anche i diagrammi di Figura 3.3, Figura 3.4, Figura 3.6, Figura 3.7, Figura 3.12, Figura 4.3 e Figura 4.4.

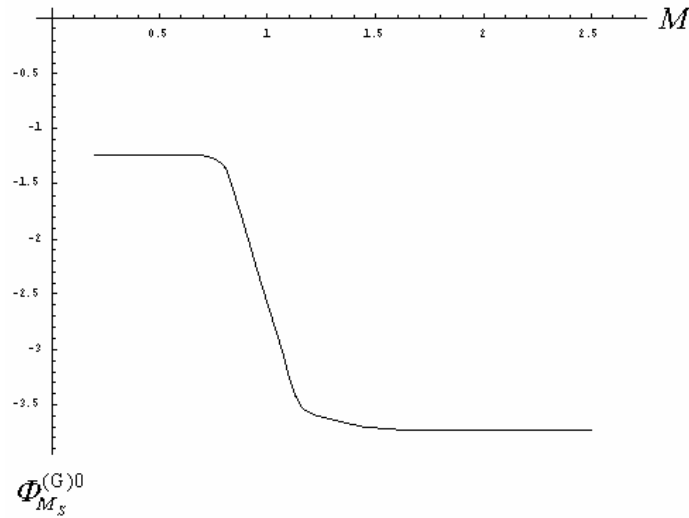


Figura 4.6

Come nel caso del coefficiente $F_{M_N}^{(G)}$, anche per il coefficiente $F_{M_S}^{(G)}$ la dipendenza dalla posizione del centro di massa può essere rappresentata in modo esplicito. Si dimostra infatti la seguente formula, che consente di esprimere il coefficiente di momento di pitch damping di un proiettile con centro di massa nel punto G' , attraverso il coefficiente di momento di pitch damping di un proiettile di identica forma e centro di massa in un punto G , diverso da G' :

$$F_{M_S}^{(G')} = F_{M_S}^{(G)} + \frac{l_{G'} - l_G}{d} (F_S^{(G)} - F_{M_N}^{(G)}) - \frac{(l_{G'} - l_G)^2}{d^2} F_N \quad 4.34$$

dove con $l_{G'}$ ed l_G si è indicata la distanza di G' e di G dalla estremità anteriore del proiettile, con d il calibro del proiettile e con $F_S^{(G)}$, $F_{M_S}^{(G)}$ e F_N il coefficiente di pitch damping, quello di momento ribaltante e quello normale, relativi alla tipologia di proiettile considerata. La formula 4.34 è importante perché avvalendosi di essa è possibile ottenere il coefficiente di momento pitch damping di tutti i proiettili di medesima forma ma differente posizione del centro di massa, quando è noto il coefficiente di momento pitch damping di un proiettile standard della forma considerata. Per maggiori dettagli su questo punto si rimanda a [2] ed alla bibliografia ivi riportata (nel Cap. 2).

Chiaramente, per la 4.30, la 4.29 può anche scriversi nel modo seguente:

$$\mathbf{M}_S = r d^4 v F_{M_S}^{(G)} (M, R_e, P_w, P_{\bar{w}}, d, \mathbf{a}) \bar{\mathbf{w}}' \quad 4.35$$

dove non compare esplicitamente il fattore $\bar{\mathbf{w}}'$. Tale fattore è comunque conglobato nel vettore $\bar{\mathbf{w}}'$ il cui modulo è \bar{w}' .

Concludiamo rilevando che in letteratura col nome "coefficiente di momento di pitch damping" viene spesso indicata non la funzione $F_{M_S}^{(G)}$ associata ad \mathbf{M}_S per mezzo della 4.29, ma una funzione ad essa proporzionale. E' questo ad esempio il caso in cui in luogo della 4.29 si assuma per \mathbf{M}_S la

seguente espressione (relativa alla stessa convenzione della 3.6, 3.16, 3.37, 3.54, 3.61 e 4.21):

$$\mathbf{M}_S = \frac{1}{2} \mathbf{r} A d^2 v \bar{\mathbf{w}}' C_{M_{\bar{\mathbf{w}}}}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{\mathbf{w}}}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \hat{\mathbf{e}}_{E_{\bar{\mathbf{w}}}} \quad 4.36$$

dove A è l'area della sezione frontale del proiettile:

$$A = \frac{\mathbf{P}}{4} d^2 \quad 4.37$$

Si ha allora manifestamente:

$$C_{M_{\bar{\mathbf{w}}}} = \frac{8}{\mathbf{p}} \mathbf{F}_{M_S}^{(G)} \quad 4.38$$

(3) Momento di Sbandamento Laterale

Il Momento di Sbandamento Laterale \mathbf{M}_{E_d} è la componente del momento $\tilde{\mathbf{M}}_a$ associata allo Sbandamento Laterale \mathbf{E}_d . Esso ha un'azione importante sulla stabilità del moto del proiettile e nei modelli balistici in cui si considera l'azione del Lift \mathbf{L} (e quindi del momento ribaltante \mathbf{M}_N) deve sempre essere preso in considerazione (assieme al momento di pitch damping \mathbf{M}_S). Per definizione:

$$\mathbf{M}_{E_d} = (l_G - l_{E_d}) \hat{\mathbf{x}}' \wedge \mathbf{E}_d \quad 4.39$$

dove con l_{E_d} si è indicata la distanza del punto di applicazione C_{E_d} della forza \mathbf{E}_d dalla estremità anteriore del proiettile. Ricordando la 3.48 che forniscono la caratterizzazione di \mathbf{E}_d , la 4.39 diviene:

$$\mathbf{M}_{E_d} = (l_G - l_{E_d}) \mathbf{r} d^3 v \mathbf{W} \sin |\mathbf{d}| \mathbf{F}_{E_d} \hat{\mathbf{x}}' \wedge \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \quad 4.40$$

Ma, conformemente alla 3.49 ed in virtù della 3.21:

$$\hat{\mathbf{x}}' \wedge \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \equiv \hat{\mathbf{x}}' \wedge \frac{\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{|\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'|} = - \frac{\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{|\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'|} \wedge \hat{\mathbf{x}}' = - \frac{(\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{|(\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{x}}'|} \equiv - \hat{\mathbf{n}}' \quad 4.41$$

per cui dalla 4.40 si trae:

$$\mathbf{M}_{E_d} = - (l_G - l_{E_d}) \mathbf{r} d^3 v \mathbf{W} \sin |\mathbf{d}| \mathbf{F}_{E_d} \hat{\mathbf{n}}' \quad 4.42$$

Ponendo:

$$\frac{l_G - l_{E_d}}{d} \mathbf{F}_{E_d} = \mathbf{F}_{M_{E_d}}^{(G)} \quad 4.43$$

siamo così condotti ad assumere la seguente rappresentazione per il momento di Sbandamento Laterale \mathbf{M}_{E_d} :

$$\mathbf{M}_{E_d} = -r d^4 v W \sin|d| F_{M_{E_d}}^{(G)}(M, R_e, P_W, d) \hat{\mathbf{n}}' \quad 4.44$$

dove:

$$\hat{\mathbf{n}}' = \frac{(\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{|(\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{x}}'|} \quad 4.45$$

e $F_{M_{E_d}}^{(G)}$ è una funzione la cui espressione dipende dalla forma, dall'assetto di volo e dalla distribuzione interna delle masse del proiettile (come si è voluto mettere in evidenza apponendo ad essa l'apice "G").⁹⁾ Essa prende il nome di *coefficiente di momento di sbandamento laterale* e come si evince dalla 4.43, dipende da F_{E_d} e dal fattore $l_G - l_{E_d}$. Poiché $l_G - l_{E_d}$ è una funzione indipendente da F_{E_d} , il coefficiente $F_{M_{E_d}}^{(G)}$ risulta effettivamente un nuovo coefficiente aerodinamico. Come si è detto a proposito della forza \mathbf{E}_d , F_{E_d} è una funzione negativa, tuttavia il valore di $l_G - l_{E_d}$ dipende da vari fattori e quindi in generale nulla può dirsi sul segno di $F_{M_{E_d}}^{(G)}$. Risulta comunque che se l'angolo di attacco è piccolo, a velocità supersoniche è senz'altro $F_{M_{E_d}}^{(G)} > 0$. E' chiaro comunque che, indipendentemente dal segno di $F_{M_{E_d}}^{(G)}$, il momento \mathbf{M}_{E_d} produce una rotazione dell'asse del proiettile nel piano passante per esso ed ortogonale al piano Σ_d , per cui provoca sempre un aumento dell'angolo d . L'azione di \mathbf{M}_{E_d} è quindi destabilizzante e per tale ragione deve sempre essere tenuta sotto controllo. La seguente Figura 4.7 illustra quanto ora detto nell'ipotesi che sia $l_G - l_{E_d} < 0$ e quindi $F_{M_{E_d}}^{(G)} > 0$.

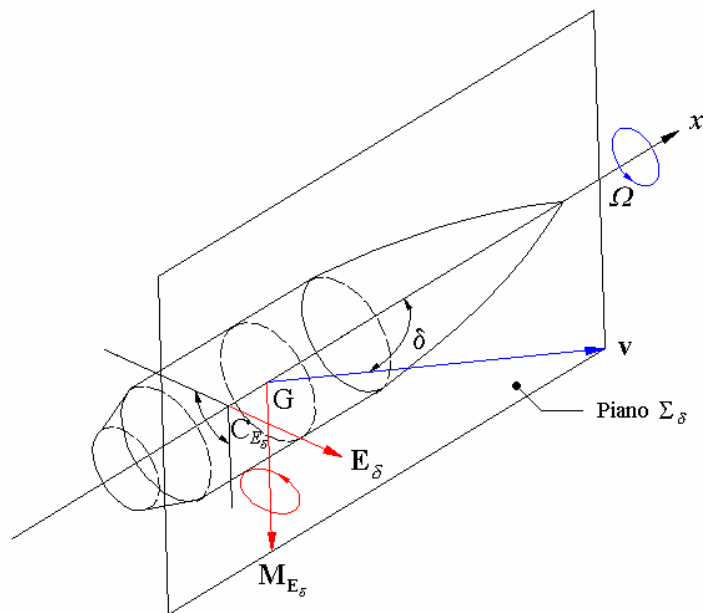


Figura 4.7

Sebbene in linea di principio $F_{M_{E_d}}^{(G)}$ debba essere una funzione di M, R_e, P_W, d , dalle osservazioni

⁹⁾ Tralasciamo, come si è detto, la dipendenza di $F_{M_N}^{(G)}$ dal tipo di materiale costituente la superficie del proiettile.

sperimentali risulta che tale funzione per le velocità tipiche dei proiettili dipende praticamente solo da M , R_e e \mathbf{d} (mentre a velocità molto basse si ha anche una dipendenza importante da \mathbf{P}_w). Tenendo conto che di norma risulta lecito trascurare anche la dipendenza da R_e , si può quindi in generale assumere:

$$\mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)} = \mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)}(M, \mathbf{d}) \quad 4.46$$

Come si è detto, almeno a velocità supersoniche, $\mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)}(M, \mathbf{d})$ sarà una funzione positiva. L'esperienza mostra che la dipendenza di $\mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)}$ dall'angolo di attacco \mathbf{d} è fortemente non lineare soprattutto a basse velocità, per cui non sempre si ottiene una soddisfacente approssimazione di $\mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)}$ attraverso una formula del tipo seguente (come di norma avviene per gli altri coefficienti aerodinamici):

$$\mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)} = \mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)0}(M) + \mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)1}(M) \sin^2 \mathbf{d} \quad 4.47$$

dove almeno $\mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)0}(M)$ per velocità supersoniche è una funzione positiva, che prende che prende il nome di *coefficiente lineare di momento di sbandamento laterale*. Così, spesso per rappresentare il coefficiente $\mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)}$ occorre utilizzare un'espressione del tipo 4.46. E' questo ad esempio il caso del proiettile d'artiglieria "Tipo M1" da 105 mm (al quale si riferiscono anche i diagrammi di Figura 3.3, Figura 3.4, Figura 3.6, Figura 3.7, Figura 3.12, Figura 4.3, Figura 4.4 e Figura 4.6). Il diagramma del coefficiente $\mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)}$ relativo a questo proiettile, è riportato, per due diversi valori dell'angolo di attacco, nella seguente Figura 4.8.

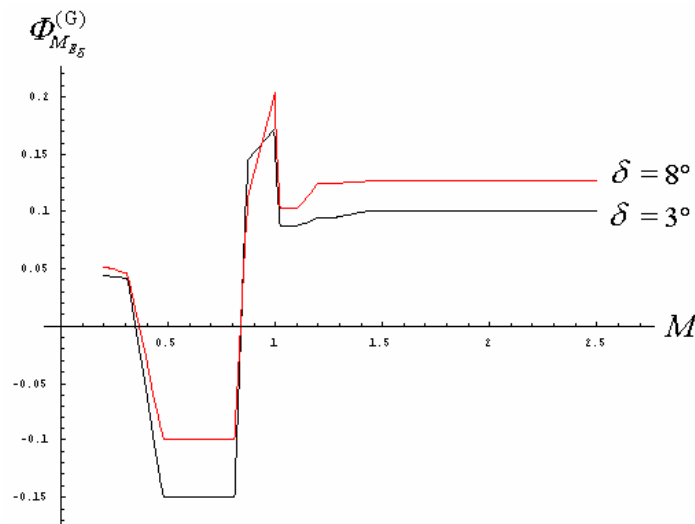


Figura 4.8

Come nel caso dei coefficienti $\mathbf{F}_{M_N}^{(G)}$ e $\mathbf{F}_{M_S}^{(G)}$, anche per il coefficiente $\mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)}$ la dipendenza dalla posizione del centro di massa può essere rappresentata in modo esplicito. Si dimostra infatti la seguente formula, che consente di esprimere il coefficiente di momento di sbandamento laterale di un proiettile con centro di massa nel punto G' , attraverso il coefficiente di momento di sbandamento

laterale di un proiettile di identica forma e centro di massa in un punto G, diverso da G':

$$\mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G')} = \mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)} + \frac{l_{G'} - l_G}{d} \mathbf{F}_N \quad 4.48$$

dove con $l_{G'}$ ed l_G si è indicata la distanza di G' e di G dalla estremità anteriore del proiettile, con d il calibro del proiettile e con \mathbf{F}_N il coefficiente aerodinamico normale relativo alla tipologia di proiettile considerata. La formula 4.48 è importante perché avvalendosi di essa è possibile ottenere il coefficiente di momento di sbandamento laterale di tutti i proiettili di medesima forma ma differente posizione del centro di massa, quando è noto il coefficiente di momento di sbandamento laterale di un proiettile standard della forma considerata. Per maggiori dettagli su questo punto si rimanda a [2] ed alla bibliografia ivi riportata (nel Cap. 2).

Chiaramente, per la 4.41, la 4.44 può anche scriversi nel modo seguente:

$$\mathbf{M}_{E_d} = \mathbf{r} d^4 v W \mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)}(M, R_e, \mathbf{P}_w, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{x}}' \wedge (\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \quad 4.49$$

dove non compare il segno “meno” ed il fattore $\sin|\mathbf{d}|$. Tale fattore è comunque conglobato nel vettore $\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'$ il cui modulo è appunto $\sin|\mathbf{d}|$.

Concludiamo rilevando che in letteratura col nome “coefficiente di momento di sbandamento laterale” viene spesso indicata non la funzione $\mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)}$ associata ad \mathbf{M}_{E_d} per mezzo della 4.44, ma una funzione ad essa proporzionale. E' questo ad esempio il caso in cui in luogo della 4.44 si assuma per \mathbf{M}_{E_d} la seguente espressione (relativa alla stessa convenzione della 3.6, 3.16, 3.37, 3.54, 3.61, 4.21 e 4.36):

$$\mathbf{M}_{E_d} = \frac{1}{2} \mathbf{r} A d^2 v W C_{M_{wd}}(M, R_e, \mathbf{P}_w, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{x}}' \wedge (\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \quad 4.50$$

dove A è l'area della sezione frontale del proiettile:

$$A = \frac{\mathbf{p}}{4} d^2 \quad 4.51$$

Si ha allora manifestamente:

$$C_{M_{wd}} = \frac{8}{\mathbf{p}} \mathbf{F}_{M_{Ed}}^{(G)} \quad 4.52$$

(4) Momento di Sbandamento Trasversale

Il Momento di Sbandamento Trasversale \mathbf{M}_{E_w} è la componente del momento $\tilde{\mathbf{M}}_a$ associata allo Sbandamento Trasversale \mathbf{E}_w . Esso, al pari di \mathbf{E}_w , non ha praticamente alcuna rilevanza pratica, tuttavia è opportuno considerarlo per completezza. Per definizione:

$$\mathbf{M}_{E_w} = (l_G - l_{E_w}) \hat{\mathbf{x}}' \wedge \mathbf{E}_w \quad 4.53$$

dove con $l_{E_{\bar{w}'}}$ si è indicata la distanza del punto di applicazione $C_{E_{\bar{w}'}}$ della forza $\mathbf{E}_{\bar{w}'}$ dalla estremità anteriore del proiettile. Ricordando la 3.57 che forniscono la caratterizzazione di $\mathbf{E}_{\bar{w}'}$, la 4.53 diviene:

$$\mathbf{M}_{E_{\bar{w}'}} = (l_G - l_{E_{\bar{w}'}}) \mathbf{r} d^4 \mathbf{W} \bar{\mathbf{w}}' F_{E_{\bar{w}'}} \hat{\mathbf{x}}' \wedge \hat{\mathbf{e}}_{E_{\bar{w}'}} \quad 4.54$$

Ma, conformemente alla 3.58 ed in virtù della 3.31:

$$\hat{\mathbf{x}}' \wedge \hat{\mathbf{e}}_{E_{\bar{w}'}} \equiv \hat{\mathbf{x}}' \wedge \frac{\bar{\mathbf{w}}'}{|\bar{\mathbf{w}}'|} = \frac{1}{|\bar{\mathbf{w}}'|} (\hat{\mathbf{x}}' \wedge \bar{\mathbf{w}}') = -\frac{1}{|\bar{\mathbf{w}}'|} (\bar{\mathbf{w}}' \wedge \hat{\mathbf{x}}') = -\frac{\bar{\mathbf{w}}' \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{|\bar{\mathbf{w}}' \wedge \hat{\mathbf{x}}'|} \equiv -\hat{\mathbf{e}}_S \quad 4.55$$

per cui dalla 4.54 si trae:

$$\mathbf{M}_{E_{\bar{w}'}} = -(l_G - l_{E_{\bar{w}'}}) \mathbf{r} d^4 \mathbf{W} \bar{\mathbf{w}}' F_{E_{\bar{w}'}} \hat{\mathbf{e}}_S \quad 4.56$$

Ponendo:

$$\frac{l_G - l_{E_{\bar{w}'}}}{d} F_{E_{\bar{w}'}} = F_{M_{E_{\bar{w}'}}}^{(G)} \quad 4.57$$

siamo così condotti ad assumere la seguente rappresentazione per il momento di Sbandamento Trasversale $\mathbf{M}_{E_{\bar{w}'}}$:

$$\mathbf{M}_{E_{\bar{w}'}} = -\mathbf{r} d^5 \mathbf{W} \bar{\mathbf{w}}' F_{E_{\bar{w}'}}^{(G)}(M, R_e, \mathbf{P}_W, \mathbf{P}_{\bar{w}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \hat{\mathbf{e}}_S \quad 4.58$$

dove:

$$\hat{\mathbf{e}}_S = \frac{\bar{\mathbf{w}}' \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{|\bar{\mathbf{w}}' \wedge \hat{\mathbf{x}}'|} \quad 4.59$$

e $F_{M_{E_{\bar{w}'}}}^{(G)}$ è una funzione la cui espressione dipende dalla forma, dall'assetto di volo e dalla distribuzione interna delle masse del proiettile (come si è voluto mettere in evidenza apponendo ad essa l'apice "G").⁽¹⁰⁾ Essa prende il nome di *coefficiente di momento di sbandamento trasversale* e come si evince dalla 4.57, dipende da $F_{E_{\bar{w}'}}$ e dal fattore $l_G - l_{E_{\bar{w}'}}$. Poiché $l_G - l_{E_{\bar{w}'}}$ è una funzione indipendente da $F_{E_{\bar{w}'}}$, il coefficiente $F_{M_{E_{\bar{w}'}}}^{(G)}$ risulta effettivamente un nuovo coefficiente aerodinamico. Come per il coefficiente di sbandamento trasversale $F_{E_{\bar{w}'}}^{(G)}$, anche per il coefficiente $F_{M_{E_{\bar{w}'}}}^{(G)}$ nulla può dirsi in generale circa il suo segno. Esso infatti dipende fortemente dalla tipologia del proiettile, dal suo assetto di volo e dalla posizione del suo centro di massa. Per tale ragione non è neppure possibile indicarne un diagramma tipo. Inoltre, stante l'assoluta irrilevanza pratica del momento $\mathbf{M}_{E_{\bar{w}'}}$, nelle tavole che forniscono le caratteristiche aerodinamiche dei proiettili non vengono praticamente mai riportate indicazioni di questa funzione. E' da rilevare però che, almeno per le velocità supersoniche, risulta di norma $F_{M_{E_{\bar{w}'}}}^{(G)} > 0$ (si veda a questo proposito anche quanto detto riguardo al coef-

¹⁰⁾ Tralasciamo, come si è detto, la dipendenza di $F_{M_N}^{(G)}$ dal tipo di materiale costituente la superficie del proiettile.

dove non compare il segno “meno” ed il fattore \bar{w}' . Tale fattore è comunque conglobato nel vettore $\hat{x}' \wedge \bar{w}'$ il cui modulo è appunto \bar{w}' .

Concludiamo rilevando che in letteratura col nome “coefficiente di momento di sbandamento trasversale” viene spesso indicata non la funzione $F_{M_{E\bar{w}'}}^{(G)}$ associata ad $M_{E\bar{w}'}$ per mezzo della 4.58, ma una funzione ad essa proporzionale. E' questo ad esempio il caso in cui in luogo della 4.58 si assuma per $M_{E\bar{w}'}$ la seguente espressione (relativa alla stessa convenzione della 3.6, 3.16, 3.37, 3.54, 3.61, 4.21, 4.36 e 4.50):

$$M_{E\bar{w}'} = \frac{1}{2} r A d^3 W C_{M_{w\bar{w}'}}(M, R_e, P_w, P_{w'}, d, a) \hat{x}' \wedge \bar{w}' \quad 4.62$$

dove A è l'area della sezione frontale del proiettile:

$$A = \frac{p}{4} d^2 \quad 4.63$$

Si ha allora manifestamente:

$$C_{M_{w\bar{w}'}} = \frac{8}{p} F_{M_{E\bar{w}'}}^{(G)} \quad 4.64$$

5. CARATTERIZZAZIONE DEL MOMENTO DI SPIN DAMPING M_a

Completiamo l'analisi delle azioni aerodinamiche agenti su un proiettile, tornando a considerare il momento di Spin Damping M_a introdotto all'inizio di questo scritto assieme alla forza F_a . Il momento di Spin Damping è dovuto alla resistenza viscosa ed ostacola la rotazione del proiettile attorno al proprio asse. Esso è praticamente sempre trascurabile e, come abbiamo visto nel Paragrafo 2, può essere rappresentato in diversi modi. Quello comunemente adottato in balistica e che anche noi utilizzeremo, è il seguente (v. anche 2.20 e 2.22):

$$M_a = r d^4 v W \widehat{F}_{M_a}(M, R_e, P_w, P_{w'}, d, a) \hat{x}' \quad 5.1$$

dove \widehat{F}_{M_a} è una funzione negativa la cui espressione dipende dalla forma del proiettile e dal materiale costituente la sua superficie. Essa prende il nome di *coefficiente di momenti di spin damping*. Sebbene in linea di principio \widehat{F}_{M_a} debba essere una funzione di $M, R_e, P_w, P_{w'}, d, a$, dalle osservazioni sperimentali risulta che tale funzione dipende praticamente solo da M , per cui si può in generale assumere:

$$\widehat{F}_{M_a} = \widehat{F}_{M_a}(M) \quad 5.2$$

dove $\widehat{F}_{M_a}(M)$ è una funzione negativa. A titolo d'esempio in Figura 5.1 di pagina seguente è riportato il diagramma del coefficiente $\widehat{F}_{M_a}(M)$ nel caso del proiettile d'artiglieria “Tipo M1” da 105mm (al quale si riferiscono anche i diagrammi di Figura 3.3, Figura 3.4, Figura 3.6, Figura 3.7, Figura 3.12, Figura 4.3, Figura 4.4, Figura 4.6 e Figura 4.8).

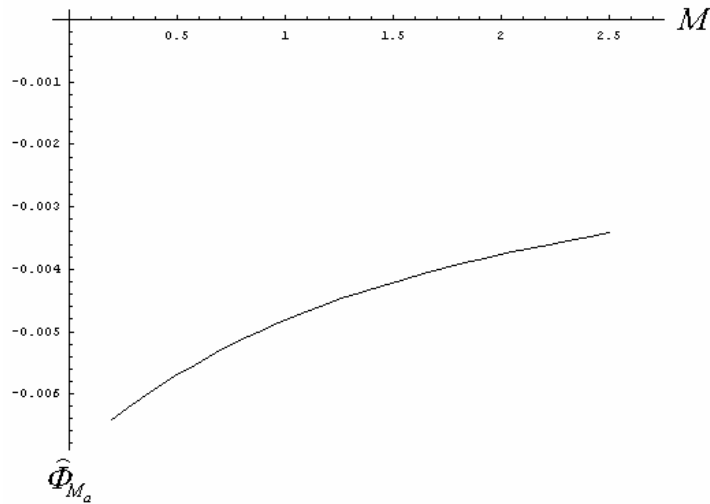


Figura 5.1

Concludiamo rilevando che in letteratura col nome “coefficiente di momento di spin damping” viene spesso indicata non la funzione \hat{F}_{M_a} associata ad \mathbf{M}_a per mezzo della 5.1, ma una funzione ad essa proporzionale. E’ questo ad esempio il caso in cui in luogo della 5.1 si assuma per \mathbf{M}_a la seguente espressione (relativa alla stessa convenzione della 3.6, 3.16, 3.37, 3.54, 3.61, 4.21, 4.36, 4.50 e 4.62):

$$\mathbf{M}_a = \frac{1}{2} \mathbf{r} A d^2 v W C_{l_w} (M, R_e, \mathbf{P}_w, \mathbf{P}_{\bar{w}'}, \mathbf{d}, \mathbf{a}) \hat{\mathbf{x}}' \quad 5.3$$

dove A è l’area della sezione frontale del proiettile:

$$A = \frac{\mathbf{p}}{4} d^2 \quad 5.4$$

Si ha allora manifestamente:

$$C_{l_w} = \frac{8}{\mathbf{p}} \hat{F}_{M_a} \quad 5.5$$

6. AZIONI AERODINAMICHE TRASCURATE

In questo scritto per caratterizzare l’azione dell’aria su un proiettile si è adottato un modello di interazione aria-proiettile basato sui seguenti nove parametri:

$$d, \mathbf{r}, \mathbf{n}, c, v, \mathbf{W}, \bar{\mathbf{w}}', \mathbf{d}, \mathbf{a} \quad 6.1$$

Questa scelta è ampiamente sufficiente nel caso dei proiettili senza alettature, anche se come abbiamo detto a proposito del Pitch Damping, è possibile utilizzare dei modelli d’interazione aria-proiettile basati su un numero maggiore di parametri sia per quanto riguarda la caratterizzazione dell’aria che per quanto riguarda il moto del proiettile. E’ da rilevare infine che un’ulteriore azione dell’aria non presa in considerazione in questo scritto è quella dovuta alla spinta idrostatica (o spinta di Archimede). Questa azione infatti, che nel caso degli aerostati e dei dirigibili è d’importanza fondamentale, nel caso dei proiettili è assolutamente trascurabile.

7. CONCLUSIONI

Come abbiamo visto, in balistica l'azione dell'aria su un proiettile viene caratterizzata dalla forza aerodinamica \mathbf{F}_a e dal momento aerodinamico complessivo $\widehat{\mathbf{M}}_a$ che, nel caso di proiettili senza alettature, si assumono espressi mediante le seguenti relazioni:

$$\mathbf{F}_a = \mathbf{R} + \mathbf{L} + \mathbf{S} + \mathbf{E}_d + \mathbf{E}_{\bar{w}}, \quad 7.1$$

$$\widehat{\mathbf{M}}_a = \mathbf{M}_N + \mathbf{M}_S + \mathbf{M}_{E_d} + \mathbf{M}_{E_{\bar{w}}} + \mathbf{M}_a \quad 7.2$$

dove le forze ed i momenti a secondo membro hanno ciascuno una precisa interpretazione fisica. La caratterizzazione di queste forze (considerate applicate al centro di massa del proiettile) e momenti è riportata nelle seguenti Tabella 7.1 e Tabella 7.2.

$\mathbf{R} = -r d^2 v^2 [\mathbf{F}_R^0(M) + \mathbf{F}_R^1(M) \sin^2 \mathbf{d}] \hat{\mathbf{v}}$	opposta a $\hat{\mathbf{v}}$	Drag	Principale	7.3
$\mathbf{L} = r d^2 v^2 \sin \mathbf{d} [\mathbf{F}_L^0(M) + \mathbf{F}_L^1(M) \sin^2 \mathbf{d}] \hat{\mathbf{e}}_L$	$\hat{\mathbf{e}}_L = \frac{(\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{v}}}{ (\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{v}} }$	Lift	Importante	7.4
$\mathbf{S} = r d^3 v \bar{\mathbf{w}}' \mathbf{F}_S^{(G)}(M, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{e}}_S$	$\hat{\mathbf{e}}_S = \frac{\bar{\mathbf{w}}' \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{ \bar{\mathbf{w}}' \wedge \hat{\mathbf{x}}' }$	Pitch Damping	Omissibile	7.5
$\mathbf{E}_d = r d^3 v W \sin \mathbf{d} \mathbf{F}_{E_d}^{(G)}(M, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{e}}_{E_d}$	$\hat{\mathbf{e}}_{E_d} = \frac{\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{ \hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}' }$	Sbandamento Laterale	Omissibile	7.6
$\mathbf{E}_{\bar{w}} = r d^4 W \bar{\mathbf{w}}' \mathbf{F}_{E_{\bar{w}}}^{(G)}(M, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{e}}_{E_{\bar{w}}}$	$\hat{\mathbf{e}}_{E_{\bar{w}}} = \frac{\bar{\mathbf{w}}'}{ \bar{\mathbf{w}}' }$	Sbandamento Trasversale	Irrilevante	7.7

Tabella 7.1

$\mathbf{M}_N = r d^3 v^2 \sin \mathbf{d} [\mathbf{F}_{M_N}^{(G)0}(M) + \mathbf{F}_{M_N}^{(G)1}(M) \sin^2 \mathbf{d}] \hat{\mathbf{e}}_{E_d}$	parallelo a \mathbf{E}_d	Momento Ribaltante	Importante	7.8
$\mathbf{M}_S = r d^4 v \bar{\mathbf{w}}' [\mathbf{F}_{M_S}^{(G)0}(M) + \mathbf{F}_{M_S}^{(G)1}(M) \sin^2 \mathbf{d}] \hat{\mathbf{e}}_{E_{\bar{w}}}$	parallelo a $\mathbf{E}_{\bar{w}}$	Momento di Pitch Damping	Importante	7.9
$\mathbf{M}_{E_d} = -r d^4 v W \sin \mathbf{d} \mathbf{F}_{M_{E_d}}^{(G)}(M, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{n}}'$	$\hat{\mathbf{n}}' = \frac{(\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{x}}'}{ (\hat{\mathbf{v}} \wedge \hat{\mathbf{x}}') \wedge \hat{\mathbf{x}}' }$	Momento di Sbandamento Laterale	Importante	7.10
$\mathbf{M}_{E_{\bar{w}}} = -r d^5 W \bar{\mathbf{w}}' \mathbf{F}_{M_{E_{\bar{w}}}}^{(G)}(M, \mathbf{d}) \hat{\mathbf{e}}_S$	parallelo a \mathbf{E}_S	Momento di Sbandamento Trasversale	Irrilevante	7.11
$\mathbf{M}_a = r d^4 v W \widehat{\mathbf{F}}_{M_a}(M) \hat{\mathbf{x}}'$	parallelo a $\hat{\mathbf{x}}'$	Momento di Spin Damping	Omissibile	7.12

Tabella 7.2

In Figura 7.1 e Figura 7.2 di pagina seguente è mostrata invece in prospettiva l'azione delle forze \mathbf{R} , \mathbf{L} , \mathbf{S} , \mathbf{E}_d , $\mathbf{E}_{\bar{w}}$ e dei momenti \mathbf{M}_N , \mathbf{M}_S , \mathbf{M}_{E_d} , $\mathbf{M}_{E_{\bar{w}}}$, \mathbf{M}_a . Infine, in Figura 7.3 e Figura 7.4 sono riportate le proiezioni di queste forze e momenti sul piano Σ_d e sul piano frontale del proiettile.

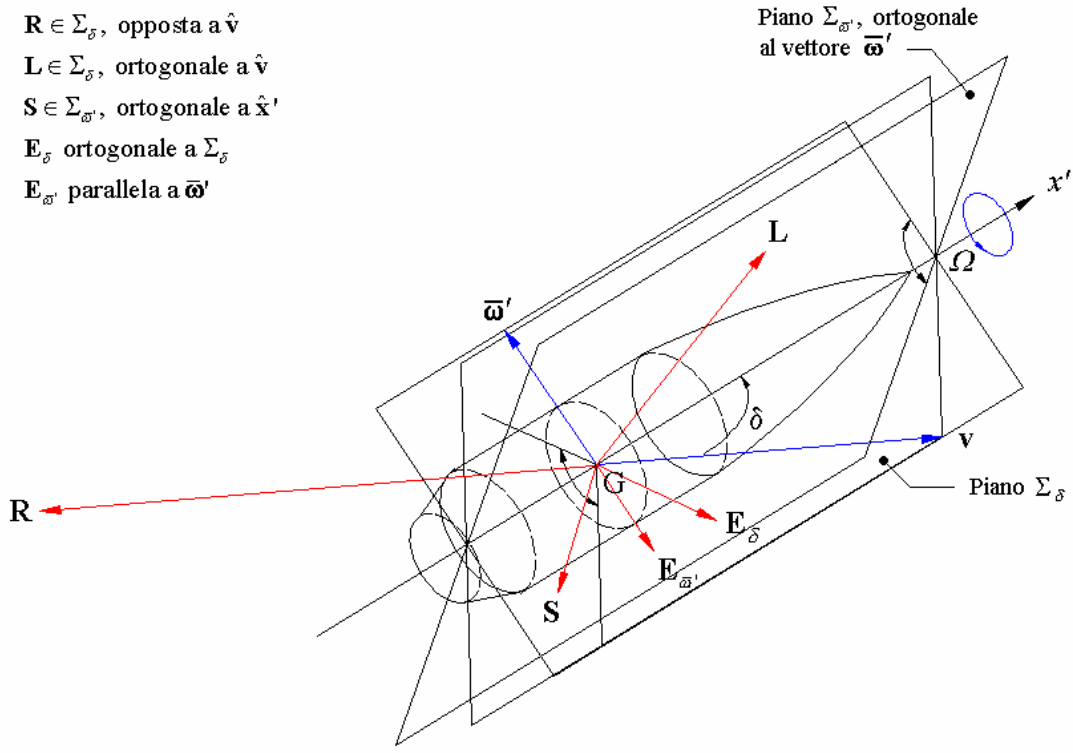


Figura 7.1

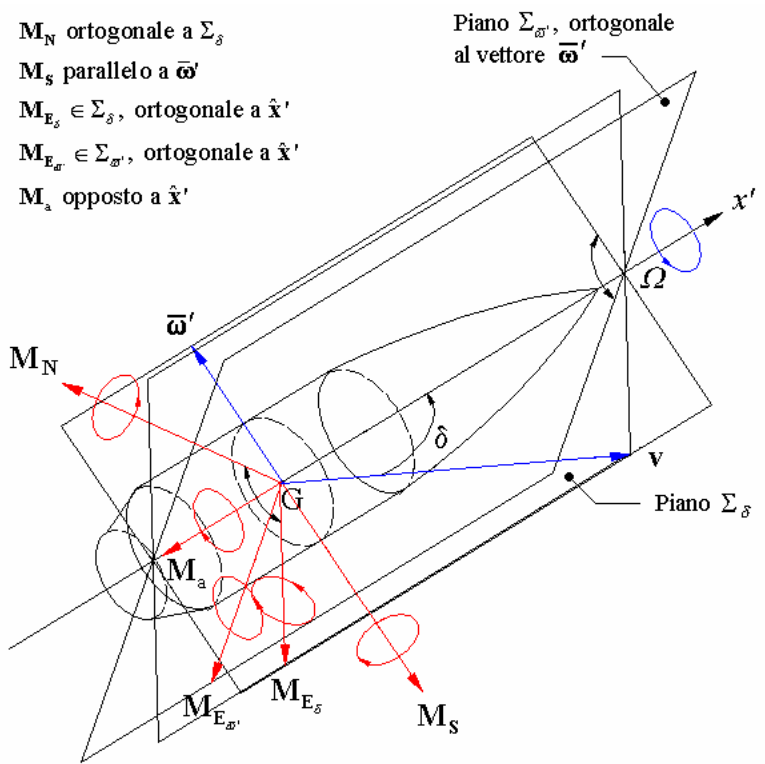


Figura 7.2

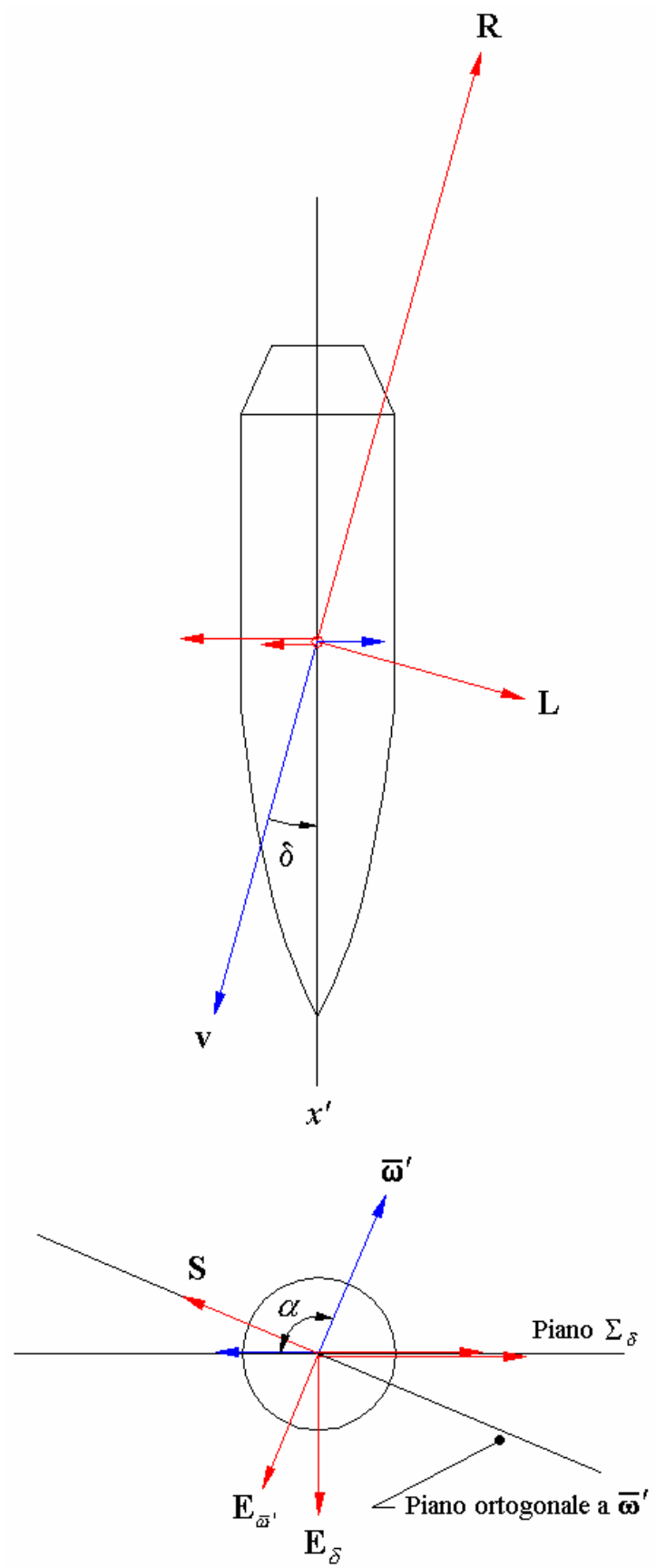


Figura 7.3

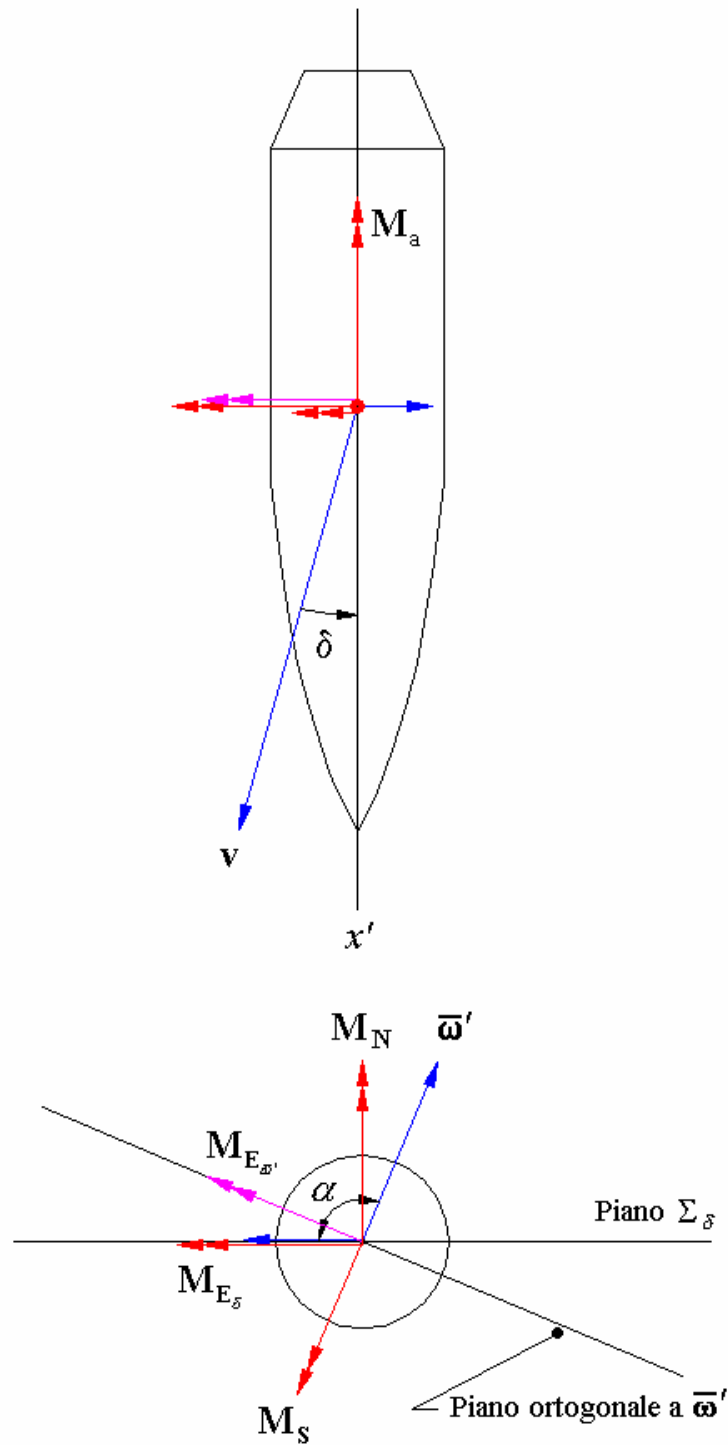


Figura 7.4

Come si evince da Tabella 7.1 e Tabella 7.2, la forza aerodinamica \mathbf{F}_a ed il momento aerodinamico complessivo $\widehat{\mathbf{M}}_a$ risultano noti quando sono note le 14 (15, se \mathbf{M}_{E_d} viene espresso mediante i coefficienti $F_{M_{E_d}}^{(G)0}$ e $F_{M_{E_d}}^{(G)1}$) funzioni elencate in Tabella 7.3 di pagina seguente. La determinazione di queste funzioni è, come si è detto nel Paragrafo 1, un problema alquanto complicato, risolto, in modo spesso approssimativo, dell'aerodinamica facendo ricorso a diverse tecniche per lo studio delle quali si rimanda alla letteratura specializzata (v. Bibliografia Generale). E' da rilevare comunque

che spesso, in relazione anche alla complessità del modello balistico che si intende realizzare ad al grado di approssimazione che si vuole raggiungere, è possibile ridurre il numero di coefficienti aerodinamici da determinare.

Drag	$F_R^0(M), F_R^1(M)$	Principali	7.13
Lift	$F_L^0(M), F_L^1(M)$	Importanti	7.14
Pitch Damping	$F_S^{(G)}(M, d)$	Omissibile	7.15
Sbandamento Laterale	$F_{E_d}(M, d)$	Omissibile	7.16
Sbandamento Trasversale	$F_{E_w}^{(G)}(M, d)$	Irrelevante	7.17
Momento Ribaltante	$F_{M_N}^{(G)0}(M), F_{M_N}^{(G)1}(M)$	Importanti	7.18
Momento di Pitch Damping	$F_{M_S}^{(G)0}(M), F_{M_S}^{(G)1}(M)$	Importanti	7.19
Momento di Sbandamento Laterale	$F_{M_{E_d}}^{(G)}(M, d)$ oppure $F_{M_{E_d}}^{(G)0}(M), F_{M_{E_d}}^{(G)1}(M)$	Importanti	7.20
Momento di Sbandamento Trasversale	$F_{E_w}^{(G)}(M, d)$	Irrelevante	7.21
Momento di Spin Damping	$\widehat{F}_{M_a}(M)$	Omissibile	7.22

Tabella 7.3

Di norma nelle tabelle delle caratteristiche aerodinamiche dei proiettili sono riportati i valori dei coefficienti aerodinamici indicati nella seguente Tabella 7.4.

Drag	$F_R^0(M), F_R^1(M)$	7.23
Lift	$F_L^0(M), F_L^1(M)$	7.24
Sbandamento Laterale	$F_{E_d}(M, d)$ oppure $F_{E_d}^0(M), F_{E_d}^1(M)$	7.25
Momento Ribaltante	$F_{M_N}^{(G)0}(M), F_{M_N}^{(G)1}(M)$	7.26
Momento di Pitch Damping	$F_{M_S}^{(G)0}(M), F_{M_S}^{(G)1}(M)$	7.27
Momento di Sbandamento Laterale	$F_{M_{E_d}}^{(G)}(M, d)$ oppure $F_{M_{E_d}}^{(G)0}(M), F_{M_{E_d}}^{(G)1}(M)$	7.28
Momento di Spin Damping	$\widehat{F}_{M_a}(M)$	7.29

Tabella 7.4

Concludiamo l'argomento riportando l'espressione della forza \mathbf{F}_a e dal momento $\widehat{\mathbf{M}}_a$ rispetto a due terne di assi cartesiani ortogonali, spesso utilizzate in balistica per caratterizzare le azioni aerodinamica su un proiettile, e cioè le terne $\{G, \hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{e}}_L, \hat{\mathbf{e}}_{E_d}\}$ e $\{G, \hat{\mathbf{x}}', \hat{\mathbf{n}}', \hat{\mathbf{e}}_{E_d}\}$.

(1) Rappresentazione di \mathbf{F}_a ed $\widehat{\mathbf{M}}_a$ rispetto alla terna formata dai versori $\hat{\mathbf{v}}, \hat{\mathbf{e}}_L, \hat{\mathbf{e}}_{E_d}$.

Poniamo:

$$\mathbf{F}_a = F_v \hat{\mathbf{v}} + F_L \hat{\mathbf{e}}_L + F_d \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \quad 7.30$$

$$\widehat{\mathbf{M}}_a = \widehat{M}_v \hat{\mathbf{v}} + \widehat{M}_L \hat{\mathbf{e}}_L + \widehat{M}_d \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \quad 7.31$$

Allora riferendosi a Figura 7.3 e Figura 7.4 è facile vedere che:

$$F_v = R - [S \sin \mathbf{a} - E_{\bar{w}} \cos \mathbf{a}] \sin |\mathbf{d}| \quad 7.32$$

$$F_L = L + [S \sin \mathbf{a} - E_{\bar{w}} \cos \mathbf{a}] \cos |\mathbf{d}| \quad 7.33$$

$$F_d = E_d + S \cos \mathbf{a} + E_{\bar{w}} \sin \mathbf{a} \quad 7.34$$

$$\widehat{M}_v = - [M_{E_d} + M_{E_{\bar{w}}} \sin \mathbf{a} - M_S \cos \mathbf{a}] \sin |\mathbf{d}| + M_a \cos |\mathbf{d}| \quad 7.35$$

$$\widehat{M}_L = [M_{E_d} + M_{E_{\bar{w}}} \sin \mathbf{a} - M_S \cos \mathbf{a}] \cos |\mathbf{d}| + M_a \sin |\mathbf{d}| \quad 7.36$$

$$\widehat{M}_d = M_N + M_{E_{\bar{w}}} \cos \mathbf{a} + M_S \sin \mathbf{a} \quad 7.37$$

(2) Rappresentazione di \mathbf{F}_a ed $\widehat{\mathbf{M}}_a$ rispetto alla terna formata dai versori $\hat{\mathbf{x}}'$, $\hat{\mathbf{n}}'$, $\hat{\mathbf{e}}_{E_d}$.

Poniamo:

$$\mathbf{F}_a = F_{x'} \hat{\mathbf{x}}' + F_{n'} \hat{\mathbf{n}}' + F_d \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \quad 7.38$$

$$\widehat{\mathbf{M}}_a = \widehat{M}_{x'} \hat{\mathbf{x}}' + \widehat{M}_{n'} \hat{\mathbf{n}}' + \widehat{M}_d \hat{\mathbf{e}}_{E_d} \quad 7.39$$

Allora riferendosi a Figura 7.3 e Figura 7.4 è facile vedere che:

$$F_{x'} = R \cos |\mathbf{d}| + L \sin |\mathbf{d}| \quad 7.40$$

$$F_{n'} = L \cos |\mathbf{d}| - R \sin |\mathbf{d}| + S \sin \mathbf{a} - E_{\bar{w}} \cos \mathbf{a} \quad 7.41$$

$$F_d = E_d + S \cos \mathbf{a} + E_{\bar{w}} \sin \mathbf{a} \quad 7.42$$

$$\widehat{M}_{x'} = M_a \quad 7.43$$

$$\widehat{M}_{n'} = M_{E_d} + M_{E_{\bar{w}}} \sin \mathbf{a} - M_S \cos \mathbf{a} \quad 7.44$$

$$\widehat{M}_d = M_N + M_{E_{\bar{w}}} \cos \mathbf{a} + M_S \sin \mathbf{a} \quad 7.45$$

Nelle precedenti formule si è assunto:

$$R = -\mathbf{r} d^2 v^2 \mathbf{F}_R \quad (\text{sempre negativa}) \quad 7.46$$

$$L = \mathbf{r} d^2 v^2 \sin |\mathbf{d}| \mathbf{F}_L \quad (\text{sempre positiva}) \quad 7.47$$

$$S = \mathbf{r} d^3 v \bar{\mathbf{w}}' \mathbf{F}_S^{(G)} \quad (\text{negativa nel caso di Figura 7.3}) \quad 7.48$$

$$E_d = \mathbf{r} d^3 v \mathbf{W} \sin|\mathbf{d}| \mathbf{F}_{E_d}^{(G)} \quad (\text{sempre negativa}) \quad 7.49$$

$$E_{\bar{w}'} = \mathbf{r} d^4 \mathbf{W} \bar{\mathbf{w}}' \mathbf{F}_{E_{\bar{w}'}}^{(G)} \quad (\text{negativa nel caso di Figura 7.3}) \quad 7.50$$

$$M_N = \mathbf{r} d^3 v^2 \sin|\mathbf{d}| \mathbf{F}_{M_N}^{(G)} \quad (\text{sempre positiva}) \quad 7.51$$

$$M_S = \mathbf{r} d^4 v \bar{\mathbf{w}}' \mathbf{F}_{M_S}^{(G)} \quad (\text{negativa nel caso di Figura 7.3}) \quad 7.52$$

$$M_{E_d} = -\mathbf{r} d^4 v \mathbf{W} \sin|\mathbf{d}| \mathbf{F}_{M_{E_d}}^{(G)} \quad (\text{negativa nel caso di Figura 7.3}) \quad 7.53$$

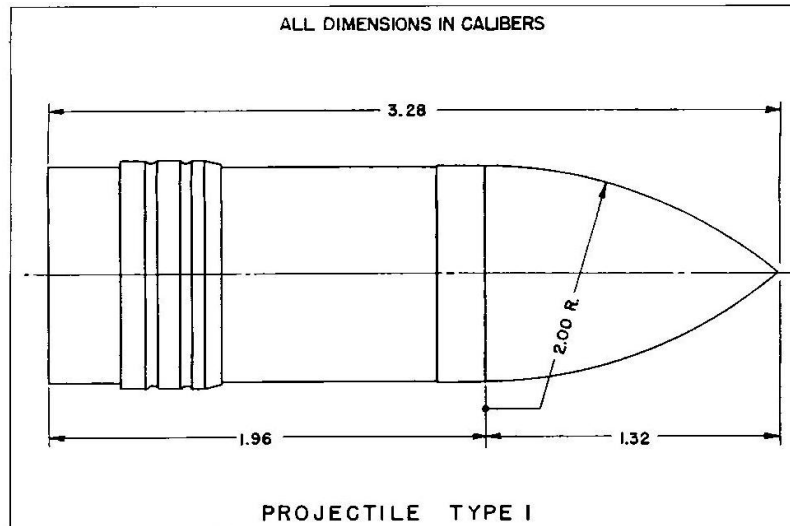
$$M_{E_{\bar{w}'}} = -\mathbf{r} d^5 \mathbf{W} \bar{\mathbf{w}}' \sin|\mathbf{d}| \mathbf{F}_{M_{E_{\bar{w}'}}}^{(G)} \quad (\text{negativa nel caso di Figura 7.3}) \quad 7.54$$

$$M_a = \mathbf{r} d^4 v \mathbf{W} \widehat{\mathbf{F}}_{M_a} \quad (\text{sempre negativa}) \quad 7.55$$

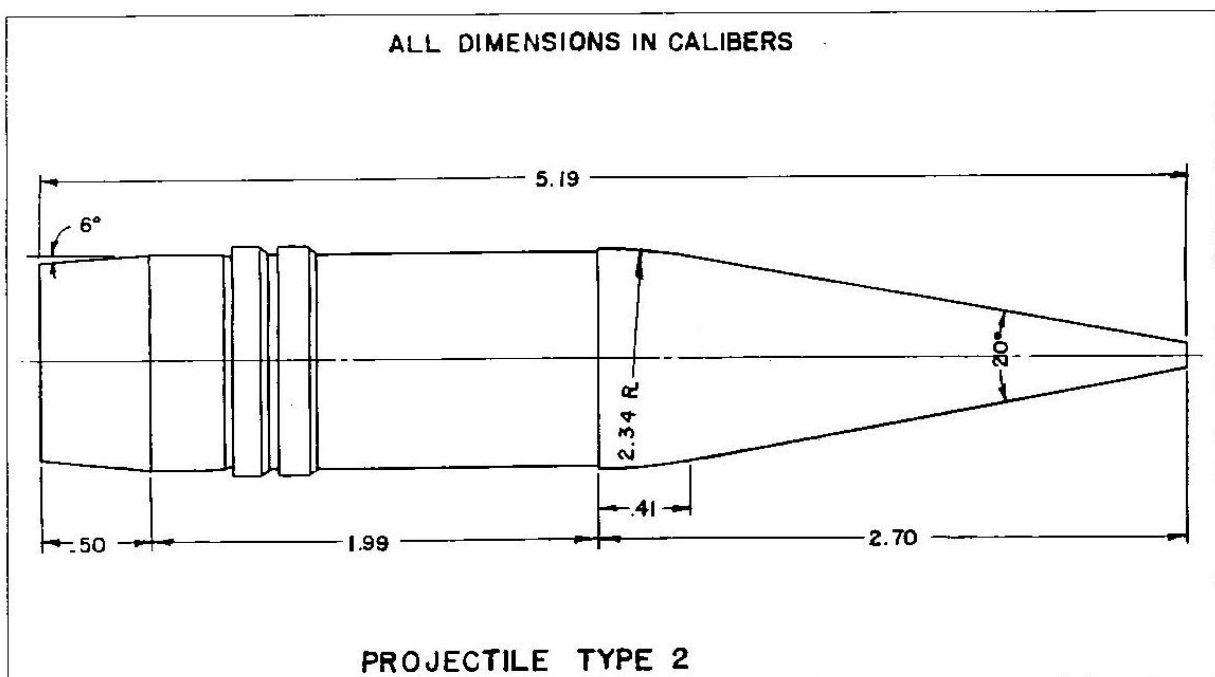
APPENDICE 1 Le principali tipologie standard di proiettili

Nelle seguenti figure sono riportate le specifiche dimensionali dei proiettili standard di tipo G1, G2, G5, G6, G7 e G8 (le immagini sono tratte da [2]). Per maggiori dettagli sull'argomento si rimanda a [2]. Il diagramma del coefficiente F_R^0 per le tipologie G1, G2, G5 e G6 è mostrato in Figura 3.2.

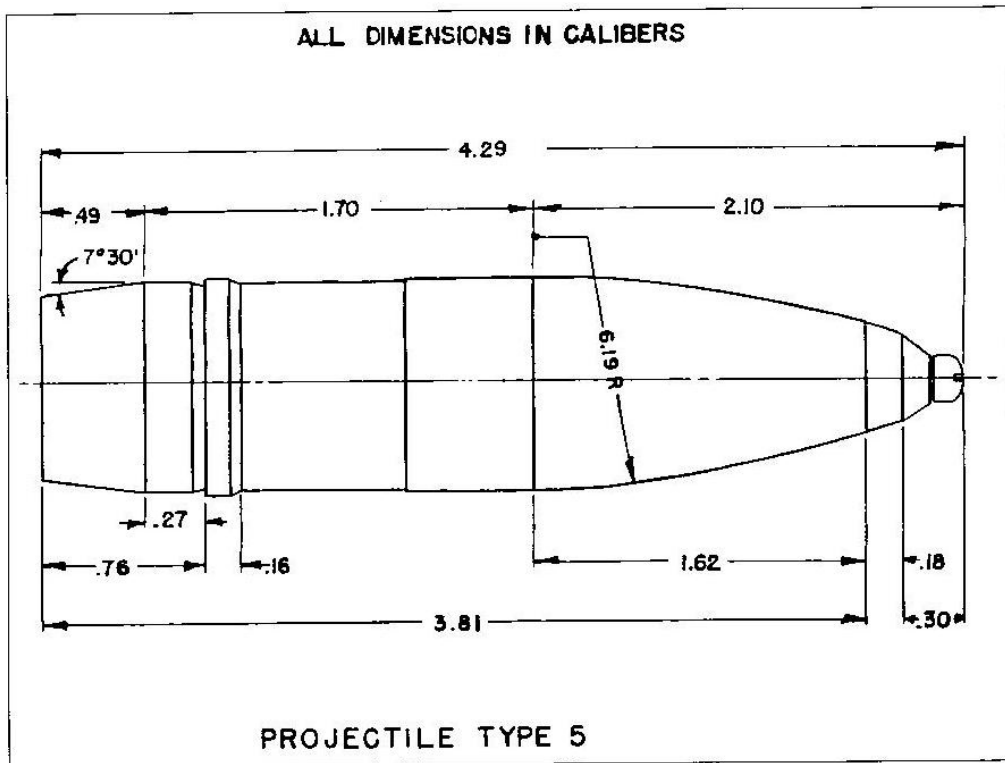
Proiettile Standard Tipo G1. Questa è stata la tipologia di proiettile utilizzata nelle prime ricerche balistiche di fine ottocento e inizi novecento.



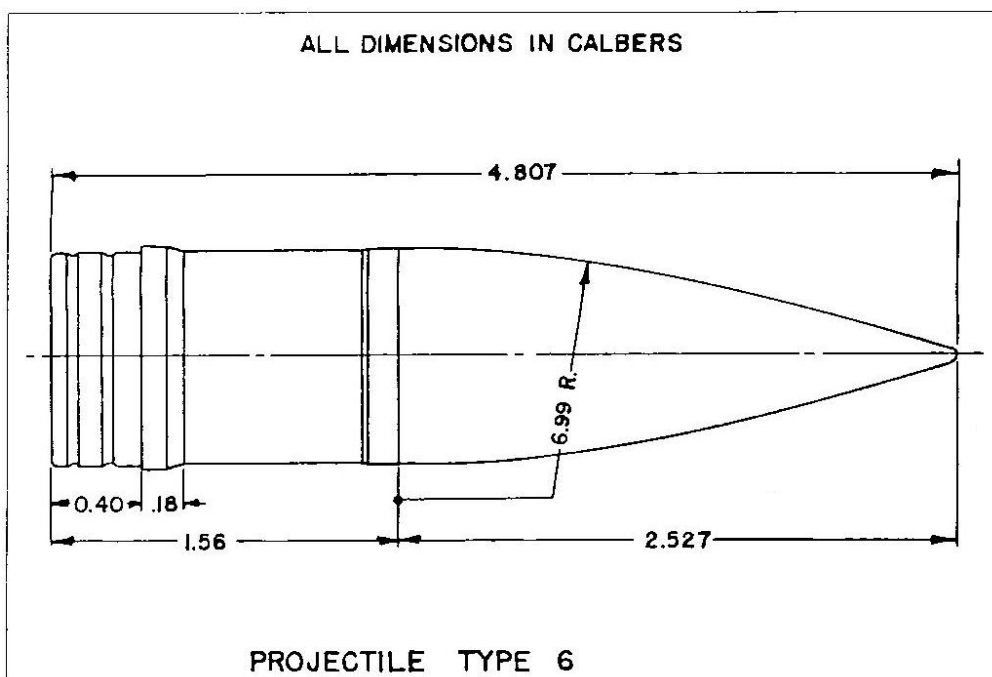
Proiettile Standard Tipo G2 Questa tipologia di proiettile è stata studiata nei primi anni successivi alla prima guerra mondiale.



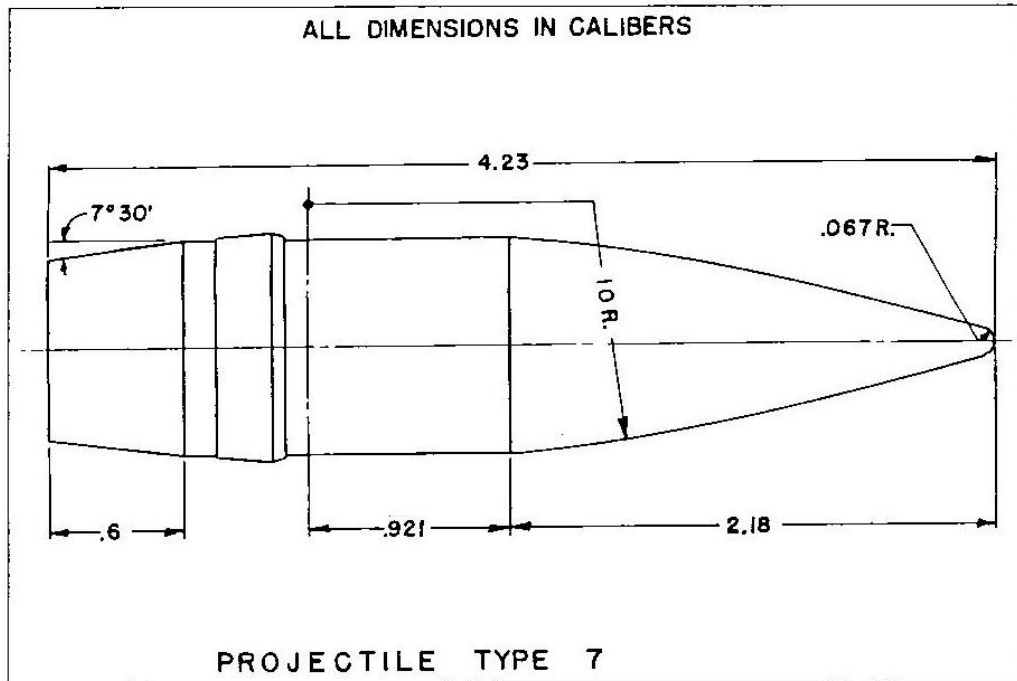
Proiettile Standard Tipo G5 Questa tipologia di proiettile, studiata intorno al 1930, è stata utilizzata negli USA fino al 1960 come tipologia di riferimento per i proiettili a base trocncoconica.



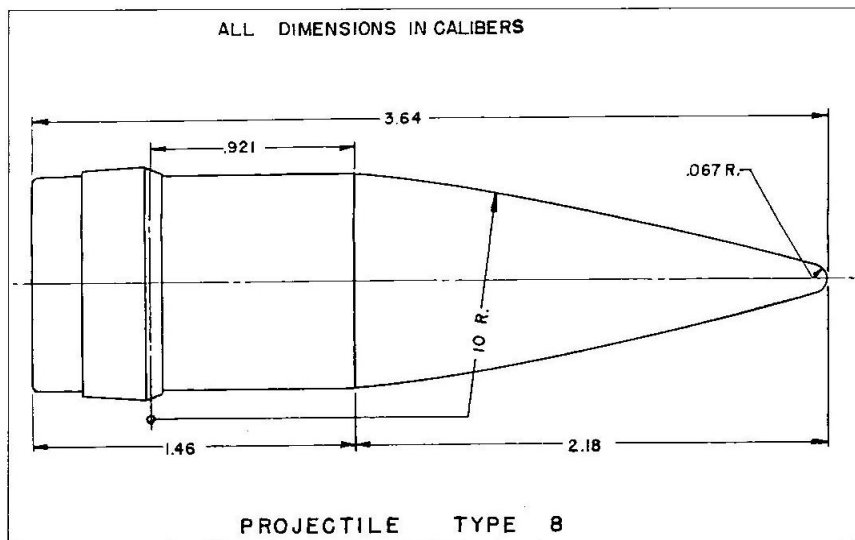
Proiettile Standard Tipo G6 Questa tipologia di proiettile, studiata intorno al 1930, è stata utilizzata negli USA fino al 1960 come tipologia di riferimento per i proiettili a base cilindrica.



Proiettile Standard Tipo G7 Questa tipologia di proiettile, studiata in Inghilterra nel 1940, è stata a lungo utilizzata come Tipologia Standard Britannica per i proiettili a base troncoconica.



Proiettile Standard Tipo G8 Questa tipologia di proiettile, studiata in Inghilterra nel 1940, è stata a lungo utilizzata come Tipologia Standard Britannica per proiettili a base cilindrica.



NOTA: Esistono anche le tipologie G3 e G4, ma non hanno grande rilevanza. Infatti, il coefficiente di drag F_R^0 dei proiettili di tipo G3 è molto simile a quello dei proiettili di tipo G1 e pertanto è a quest'ultimo che si fa riferimento, mentre la tipologia G4 è di scarso interesse perché è poco utilizzata.

Coefficiente	Notazione MGBStudio	Notazione BRL	Notazione NACA	Notazione Standard
Drag (Drag Coefficient)	\mathbf{F}_R	$C_D = \frac{8}{\rho} \mathbf{F}_R$	$C_D = \frac{8}{\rho} \mathbf{F}_R$	$K_D = \mathbf{F}_R$
Lift (Lift Force Coefficient)	\mathbf{F}_L	$C_{L_a} = \frac{8}{\rho} \mathbf{F}_L$	$C_{L_a} = \frac{8}{\rho} \mathbf{F}_L$	$K_L = \mathbf{F}_L$
Pitch Damping (Pitch Damping Force Coefficient)	$\mathbf{F}_S^{(G)}$	$C_{N_q} + C_{N_a} = \frac{8}{\rho} \mathbf{F}_S^{(G)}$	$C_{Z_q} + C_{Z_a} = -\frac{16}{\rho} \mathbf{F}_S^{(G)}$	$K_S = -\mathbf{F}_S^{(G)}$
Sbandamento Laterale (Magnus Force Coefficient)	\mathbf{F}_{E_a}	$C_{N_{ra}} = \frac{8}{\rho} \mathbf{F}_{E_a}$	$C_{Y_{ra}} = \frac{16}{\rho} \mathbf{F}_{E_a}$	$K_F = -\mathbf{F}_{E_a}$
Sbandamento Trasversale (Magnus Cross Force Coefficient)	$\mathbf{F}_{E_{\omega}}^{(G)}$	$C_{N_{pq}} = \frac{8}{\rho} \mathbf{F}_{E_{\omega}}^{(G)}$	$C_{Y_{pq}} = -\frac{32}{\rho} \mathbf{F}_{E_{\omega}}^{(G)}$	$K_{XF} = -\mathbf{F}_{E_{\omega}}^{(G)}$
Momento Ribaltante (Overturing Moment Coefficient)	$\mathbf{F}_{M_N}^{(G)}$	$C_{M_a} = \frac{8}{\rho} \mathbf{F}_{M_N}^{(G)}$	$C_{m_a} = \frac{8}{\rho} \mathbf{F}_{M_N}^{(G)}$	$K_M = \mathbf{F}_{M_N}^{(G)}$
Momento di Pitch Damping (Pitch Damping Moment Coefficient)	$\mathbf{F}_{M_S}^{(G)}$	$C_{M_q} + C_{M_a} = \frac{8}{\rho} \mathbf{F}_{M_S}^{(G)}$	$C_{m_q} + C_{m_a} = \frac{16}{\rho} \mathbf{F}_{M_S}^{(G)}$	$K_H = -\mathbf{F}_{M_S}^{(G)}$
Momento di Sbandamento Laterale (Magnus Moment Coefficient)	$\mathbf{F}_{M_{E_a}}^{(G)}$	$C_{M_{ra}} = \frac{8}{\rho} \mathbf{F}_{M_{E_a}}^{(G)}$	$C_{n_{ra}} = \frac{16}{\rho} \mathbf{F}_{M_{E_a}}^{(G)}$	$K_T = -\mathbf{F}_{M_{E_a}}^{(G)}$
Momento di Sbandamento Trasversale (Magnus Cross Moment Coefficient)	$\mathbf{F}_{E_{\omega}}^{(G)}$	$C_{M_{pq}} = \frac{8}{\rho} \mathbf{F}_{E_{\omega}}^{(G)}$	$C_{n_{pq}} = -\frac{32}{\rho} \mathbf{F}_{E_{\omega}}^{(G)}$	$K_{XT} = -\mathbf{F}_{E_{\omega}}^{(G)}$
Momento di Spin Damping (Spin Damping Moment Coefficient)	$\bar{\mathbf{F}}_{M_a}$	$C_{l_p} = \frac{8}{\rho} \bar{\mathbf{F}}_{M_a}$	$C_{l_p} = \frac{16}{\rho} \bar{\mathbf{F}}_{M_a}$	$K_A = -\bar{\mathbf{F}}_{M_a}$

Tabella A2.1

Nella simbologia del BRL e del NACA, il valore assoluto dell'angolo di attacco \mathbf{d} è indicato con \mathbf{a}_t e viene chiamato “angolo totale di attacco”. Si pone altresì $\mathbf{d} = \sin \mathbf{a}_t$. Risulta⁽¹⁾:

$$\mathbf{d} \equiv \sin \mathbf{a}_t = \sqrt{(\sin \mathbf{a} \cos \mathbf{b})^2 + \sin^2 \mathbf{b}} \approx \sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2} \quad \text{se } \mathbf{a}_t < 15^\circ \quad \text{A2.1}$$

dove:

- \mathbf{a} è l'angolo di beccheggio (“pitch” o “angle of attack”) che individua la rotazione attorno all'asse di versore $\hat{\mathbf{e}}_{E_d}$.
- \mathbf{b} è l'angolo di imbardata (“yaw” o “angle of sideslip”⁽²⁾) che individua la rotazione attorno all'asse di versore $\hat{\mathbf{n}}'$.

Nella simbologia del BRL e del NACA inoltre, la velocità di rotazione assiale del proiettile, da noi indicata con \mathbf{W} , viene denotata con p , mentre la velocità di rotazione trasversale del proiettile, da noi indicata con $\bar{\mathbf{w}}'$, viene denotata con q_t .⁽³⁾ Si pone altresì:

$$q_t = \sqrt{q^2 + r^2} \quad \text{A2.2}$$

dove:

- q proiezione del vettore $\bar{\mathbf{w}}$ lungo la direzione del versore $\hat{\mathbf{e}}_{E_d}$
- r proiezione del vettore $\bar{\mathbf{w}}$ lungo la direzione del versore $\hat{\mathbf{n}}'$

Infine rileviamo che nella simbologia del BRL e del NACA, le espressioni che rappresentano le approssimazioni balistiche dei coefficienti aerodinamici hanno una forma standard diversa da quella da noi adottata. Ad esempio, secondo la simbologia del BRL, la 3.4 che qui per comodità riscriviamo:

$$\mathbf{F}_R = \mathbf{F}_R^0(M) + \mathbf{F}_R^1(M) \sin^2 \mathbf{d}, \quad \text{A2.3}$$

assume la forma seguente:

$$C_D = C_{D_0}(M) + C_{D_{q^2}}(M) \mathbf{d}^2 \quad \text{A2.4}$$

In tutti i rapporti tecnici del BRL, del NACA e di altre organizzazioni analoghe, come ad esempio il Naval Surface Weapons Center (NSWC), è comunque sempre riportata la lista dei simboli utilizzati, per cui non possono sorgere dubbi di interpretazione.

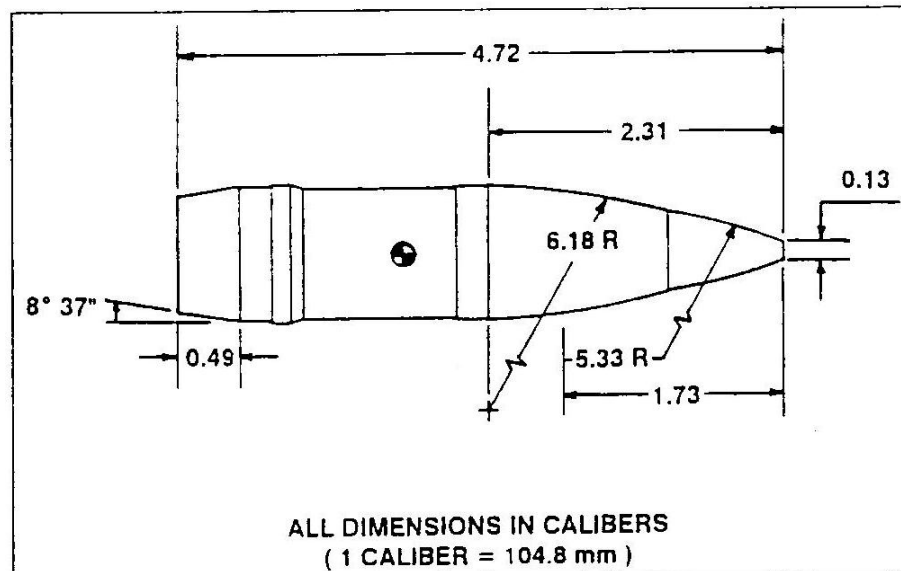
¹⁾ Non si confonda questo \mathbf{d} con l'angolo di attacco.

²⁾ In aeronautica “sideslip” significa “scivolata d'ala”; nell'automobilismo “sideslip” significa invece “sbandata”.

³⁾ Risultano quindi chiarite le notazioni utilizzate per gli indici nei coefficienti aerodinamici.

APPENDICE 3 Specifiche dimensionali del proiettile d'artiglieria "Tipo M1" da 105 mm

Nella seguente figura sono riportate le specifiche dimensionali del proiettile d'artiglieria "Tipo M1" da 105 mm (l'immagine è tratta da [2]).



Le caratteristiche fisiche del proiettile sono invece le seguenti:

- Peso 14.97 Kg
- Momento d'inerzia assiale 0.02326 Kg m²
- Momento d'inerzia trasversale 0.23118 Kg m²
- Centro di gravità 18.34 cm dalla base

Le caratteristiche aerodinamiche del proiettile d'artiglieria "Tipo M1" da 105 mm per piccoli valori dell'angolo di attacco sono riportate nella seguente memoria (reperibile presso il DTIC):

- E. T. Roecker, "The Aerodynamic Proprieties of the 105 mm HE Shell, M1, in Subsonic and Transonic Flight", Ballistic Research Laboratories Memorandum Report No. 929, 1955.

Le caratteristiche aerodinamiche del proiettile d'artiglieria "Tipo M1" da 105 mm per valori dell'angolo di attacco elevati sono invece riportate nella memoria seguente:

- R. L. McCoy, "The Subsonic Aerodynamic Characteristics of the 105 mm HE Shell, M1, at Angles of Attack From Zero to 180 Degrees", Ballistic Research Laboratories Memorandum Report No. 2353, 1974.

Infine, un elenco delle caratteristiche aerodinamiche di questo proiettile è riportato anche in [2], Appendice B (pag. 218).

Le caratteristiche aerodinamiche di molti proiettili si possono trovare nei rapporti tecnici del Ballistic Research Laboratory (BRL) di Aberdeen Proving Ground, Maryland. Per avere un'idea di questi documenti ci si può riferire al seguente, reperibile on-line dal sito del DTIC:

- R. L. McCoy, "Aerodynamic Characteristics of the 30mm XM788E1 and XM789 Projectiles", Ballistic Research Laboratory, Technical Report, ARBRL-TR-02432.

BIBLIOGRAFIA GENERALE

- [1] T. Levi-Civita, U. Amaldi, “Lezioni di Meccanica Razionale”, Vol. 1, Vol. 2 Parte I, Vol. 2 Parte II, Zanichelli.
- [2] R. L. McCoy, “Modern Exterior Ballistics”, Schiffer Publishing Ltd. L’Errata Corri-ge del libro si può scaricare liberamente da internet al seguente indirizzo:
<http://www.eskimo.com/~jbm/bibliography/exterior.html>
- [3] M. G. Busato, “Le Equazioni Generali della Balistica Esterna per i Proiettili a Massa Costante”, mgbstudio.net
- [4] M. G. Busato, “Introduzione al Component Buildup Method nel Caso di Proiettili Senza Alettature”, mgbstudio.net
- [5] N. F. Krasnov, “Aerodynamics of Bodies of Revolution”, Edited and Annotated by D. N. Morris, The RAND Corporation.
- [6] F. G. Mason, “Approximate Methods for Weapon Aerodynamics”, AIAA, Vol. 186.
- [7] M. G. Busato, “La Forza Gravitazionale Agente Su un Proiettile in Volo”, mgbstu-
dio.net

Per ulteriori riferimenti bibliografici e documentazione tecnica, si può anche fare riferimento al:

- National Technical Information Service (NTIS), U.S. Department of Commerce, 5285 Port Royal Road, Springfield, Virginia, 22151. (703) 487-4650, <http://www.ntis.gov>
- Defense Technical Information Center (DTIC), DTIC Customer Service Help Desk, Special Programs Branch (DTIC-BLS), 8725 John J. Kingman Road, Suite 0944, Ft. Bel-voir, VA 22060-6218, <http://www.dtic.mil>
- Digital Library del National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Tecnical Re-
port Server, <http://naca.larc.nasa.gov>
- NATO Research and Technology Organisation, <http://www.rta.nato.int>

INDICE GENERALE

1. INTRODUZIONE	1
2. L'AZIONE DELL'ARIA SU UN PROIETTILE	4
3. CARATTERIZZAZIONE DELLA FORZA F_a	11
4. CARATTERIZZAZIONE DEL MOMENTO ASSOCIATO AD F_a	30
5. CARATTERIZZAZIONE DEL MOMENTO DI SPIN DAMPING M_a	45
6. AZIONI AERODINAMICHE TRASCURATE	46
7. CONCLUSIONI	47
APPENDICE 1 Le principali tipologie standard di proiettili	54
APPENDICE 2 Tabella di comparazione dei simboli utilizzati in balistica per rappresentare i coefficienti aerodinamici	57
APPENDICE 3 Specifiche dimensionali del proiettile d'artiglieria "Tipo M1" da 105 mm	59
BIBLIOGRAFIA GENERALE	