

M. G. BUSATO

**RAPPRESENTAZIONE ANALITICA
DEI PUNTALI OGIVALI
PER PROIETTILI**

SOMMARIO

In numerose applicazioni balistiche, ed in particolare per calcolare la resistenza aerodinamica di un proiettile, occorre spesso disporre delle formule che consentono di descrivere analiticamente un puntale ogivale quando se ne conoscano le caratteristiche dimensionali. In questo scritto sono riportate e dimostrate tali formule, e precisamente è riportata l'equazione della circonferenza che rappresenta l'ogiva, l'equazione che consente di trovare gli angoli di raccordo della ogiva e le equazioni che ne consentono di calcolare la superficie laterale ed il volume.

1. INTRODUZIONE

Il tipo di puntale considerato è mostrato nella seguente Figura 1.1, nella quale sono anche indicati i parametri che ne caratterizzano la geometria. Il puntale è detto con *raccordo secante* se $d'_n > 0$ mentre è detto con *raccordo tangente* se $d'_n = 0$.

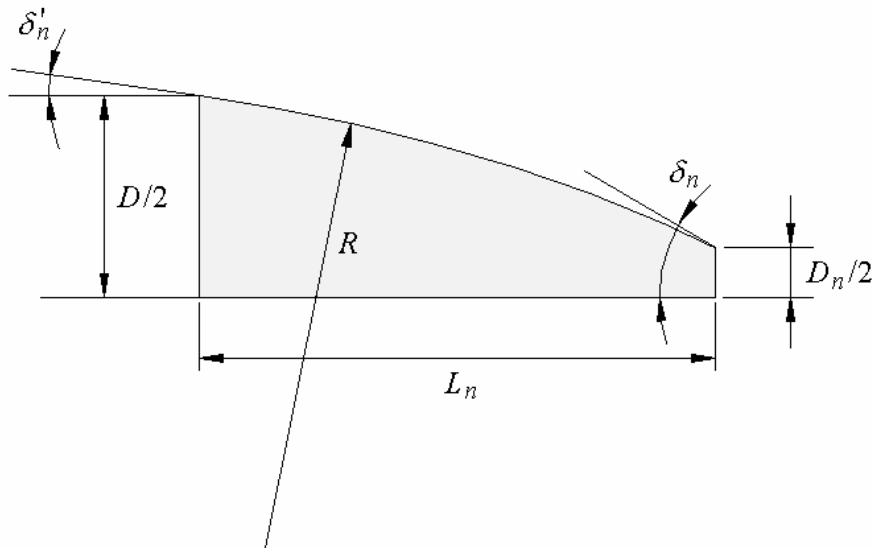


Figura 1.1

Le grandezze solitamente assunte per individuare un puntale ogivale sono le seguenti:

- D diametro massimo,
- D_n diametro minimo,
- L_n lunghezza totale,
- R raggio dell'ogiva oppure d_n angolo al vertice.

Chiaramente, se $D_n = 0$ l'ogiva ha la terminazione a punta. Se $R \rightarrow \infty$ l'ogiva degenera in un tronco di cono (caso $D_n \neq 0$) o in un cono (caso $D_n = 0$).

Nel presente scritto sono riportate e dimostrate le formule attraverso le quali è possibile rappresentare un'ogiva di assegnate caratteristiche, individuarne gli angoli di raccordo, cioè d_n e d'_n , e calcolarne la superficie laterale ed il volume.

2. EQUAZIONE DELL'OGIVA

Utilizzando il riferimento cartesiano $\{O, x, y\}$ mostrato in Figura 2.1, l'equazione della circonferenza che rappresenta l'ogiva è la seguente:

$$y = y_C + \sqrt{R^2 - (x - x_C)^2} \quad 2.1$$

dove R è il raggio dell'ogiva e x_C, y_C sono le coordinate del centro della circonferenza considerata,

cioè le coordinate del punto C in Figura 2.1. Si ha, utilizzando il simbolismo introdotto nel precedente paragrafo:

$$x_C = \frac{1}{4} \left(2L_n - (D - D_n) \sqrt{\frac{16R^2 - (D - D_n)^2 - 4L_n^2}{(D - D_n)^2 + 4L_n^2}} \right) \quad 2.2$$

$$y_C = \frac{1}{4} \left(D + D_n - 2L_n \sqrt{\frac{16R^2 - (D - D_n)^2 - 4L_n^2}{(D - D_n)^2 + 4L_n^2}} \right) \quad 2.3$$

Risulta inoltre che per assegnati valori di D , D_n ed L_n , l'ogiva si raccorda correttamente al corpo del proiettile, cioè il suo arco è sempre decrescente nel primo quadrante del riferimento $\{O, x, y\}$, purché si assuma:

$$R \geq R_C = \frac{(D - D_n)^2 + 4L_n^2}{4(D - D_n)} \quad 2.4$$

Si ha quindi una limitazione inferiore per il valore di R . Nella 2.4, la condizione $R = R_C$ corrisponde all'ogiva con raccordo tangente ($\mathbf{d}'_n = 0$). Se si assume invece $R > R_C$ allora si ottiene un'ogiva con raccordo secante ($\mathbf{d}'_n \geq 0$).

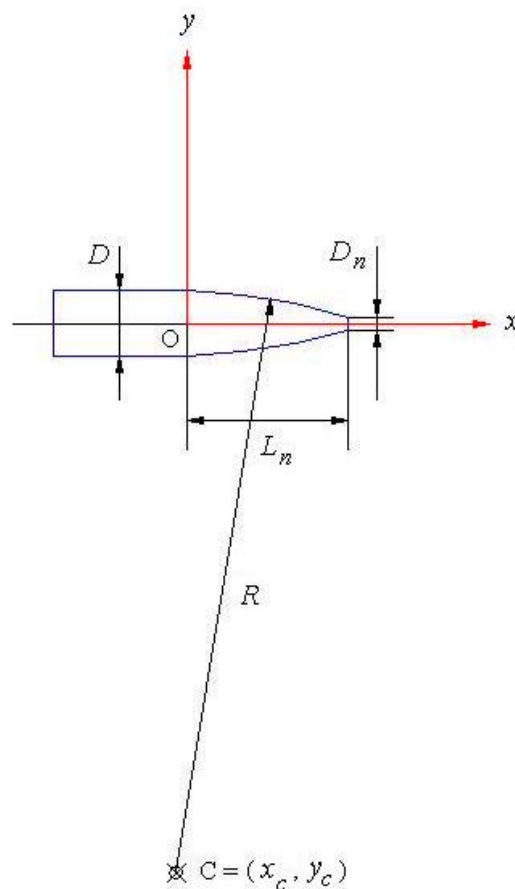


Figura 2.1

3. ANGOLI DI RACCORDO DI UN'OGIVA

Noti D , D_n , L_n ed R , gli angoli \mathbf{d}_n e \mathbf{d}'_n si ottengono mediante le formule seguenti:

$$\mathbf{d}_n = \left| \arctan \left(\frac{x_c - L_n}{\sqrt{R^2 - (x_c - L_n)^2}} \right) \right| \quad 3.1$$

$$\mathbf{d}'_n = \left| \arctan \left(\frac{x_c}{\sqrt{R^2 - x_c^2}} \right) \right| \quad 3.2$$

dove x_c è dato dalla 2.2.

Per gli angoli \mathbf{d}_n e \mathbf{d}'_n sussiste chiaramente una limitazione equivalente alla 2.4. Si ha infatti:

$$\tilde{\mathbf{d}}_n \equiv \arctan \left(\frac{D - D_n}{2L_n} \right) < \mathbf{d}_n \leq \arctan \left(\frac{4(D - D_n)L_n}{(D - D_n)^2 - 4L_n^2} \right) \equiv \bar{\mathbf{d}}_n \quad 3.3$$

Nella 3.3, la condizione $\mathbf{d}_n = \bar{\mathbf{d}}_n$ corrisponde all'ogiva con raccordo tangente. Se invece si assume $\mathbf{d}_n = \tilde{\mathbf{d}}_n$ l'ogiva degenera in un tronco di cono (caso $D_n \neq 0$) o in un cono (caso $D_n = 0$). In tal caso si ha ovviamente $\mathbf{d}'_n = \mathbf{d}_n$. Come si è detto all'inizio, per caratterizzare un'ogiva si può assumere \mathbf{d}_n in luogo di R . In questo caso R è allora fornito dalla seguente relazione:

$$R = \frac{[(D - D_n)^2 + 4L_n^2] \sec \mathbf{d}_n}{4[2L_n \tan \mathbf{d}_n - (D - D_n)]} \quad 3.4$$

Chiaramente, nella 3.4 \mathbf{d}_n deve soddisfare alla limitazione 3.3.

4. SUPERFICIE LATERALE E VOLUME DI UN'OGIVA

la superficie laterale S_{lat} ed il volume V di un'ogiva risultano rispettivamente dati dalle formule seguenti:

$$S_{lat} = 2\mathbf{p}Ry_c \left(\arctan \frac{x_c}{\sqrt{R^2 - x_c^2}} - \arctan \frac{x_c - L_n}{\sqrt{R^2 - (x_c - L_n)^2}} + \frac{L_n}{y_c} \right) \quad 4.1$$

$$V = \frac{\mathbf{p}}{2} x_c y_c (D - D_n) + \mathbf{p}R^2 y_c \left(\arctan \frac{x_c}{\sqrt{R^2 - x_c^2}} - \arctan \frac{x_c - L_n}{\sqrt{R^2 - (x_c - L_n)^2}} \right) + \mathbf{p}L_n \left(R^2 - x_c(x_c - L_n) - \frac{L_n}{3} + \frac{D_n}{2} y_c \right) \quad 4.2$$

e considerando i triangoli rettangoli CAM e DAB è facile vedere che:

$$\mathbf{b} = \arcsin \frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \arcsin \frac{\sqrt{R^2 - \frac{1}{4} \left[\left(\frac{D - D_n}{2} \right)^2 - L_n^2 \right]}}{R} \quad 5.6$$

$$\mathbf{g} = \arcsin \frac{\overline{DB}}{\overline{AB}} = \arcsin \frac{L_n}{\sqrt{\left(\frac{D - D_n}{2} \right)^2 + L_n^2}} \quad 5.7$$

Infatti:

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{DB}^2} \quad ; \quad \overline{CM} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \overline{AM}^2} = \sqrt{\overline{CA}^2 - \left(\frac{1}{2} \overline{AB} \right)^2} \quad 5.8$$

Sostituendo la 5.5 nella 5.3 e nella 5.4 con \mathbf{b} e \mathbf{g} forniti rispettivamente dalle 5.6 e 5.7 ed applicando successivamente le formule di addizione, si ottengono subito la 2.2 e la 2.3, che risultano quindi dimostrate.

Chiaramente, affinché l'ogiva si raccordi con il corpo del proiettile in modo corretto, cioè affinché in Figura 2.1 l'arco di circonferenza sia sempre decrescente nel primo quadrante del riferimento $\{O, x, y\}$, occorre che sia $\mathbf{b} \geq \mathbf{g}$, cioè che risulti:

$$\mathbf{a} \geq 0 \quad 5.9$$

Ovviamente, il caso $\mathbf{a} = 0$ corrisponde alla situazione in cui l'ogiva si raccorda al corpo del proiettile in modo tangente.

La 5.9, in forza delle 5.6 e 5.7, pone una restrizione ai valori ammissibili per i parametri R , D , L_n e D_n . Utilizzando nella 5.5 le espressioni di \mathbf{b} e \mathbf{g} fornite dalle 5.6 e 5.7, risulta allora dalla 5.9 che il raggio R deve soddisfare alla seguente relazione (per assegnati valori di D , L_n , D_n):

$$R > R_C = \left(\frac{(D_n - 1)^2 + 4L_n^2}{4(1 - D_n)} \right) D \quad 5.10$$

Anche la 2.4 è quindi dimostrata.

La 2.1 è l'equazione cartesiana di una circonferenza di raggio R e centro nel punto C di coordinate x_C, y_C e quindi non ha bisogno di ulteriori precisazioni.

Le 3.1 e 3.2 seguono direttamente dalla 2.1 calcolandone la derivata rispettivamente nei punti $x = L_n$ ed $x = 0$. Il valore assoluto è stato introdotto perché gli angoli \mathbf{d}_n e \mathbf{d}'_n si considerano sempre positivi.

La limitazione 3.3 si ottiene osservando che a parità di D , D_n ed L_n , l'angolo \mathbf{d}_n è massimo quando

l'ogiva è a raccordo tangente ed è minimo quando l'ogiva degenera in un tronco di cono (o in un cono se $D_n = 0$). L'angolo limite \bar{d}_n si ottiene quindi assumendo che nella 3.1 sia $R = R_C$ ed esprimendo di conseguenza anche il valore di x_C . L'angolo limite \tilde{d}_n è invece chiaramente quello di un cono di base $D - D_n$ ed altezza L_n .

La formula 3.4 che fornisce R in funzione di D , D_n , L_n e d_n si ottiene esprimendo nella 3.1 x_C mediante la 2.2 e quindi esplicitando R dalla relazione che così si ottiene. Occorrono diversi passaggi ma alla fine si perviene alla 3.4 che risulta quindi dimostrata.

Non resta ora che dimostrare le formule 4.1 e 4.2 le quali forniscono rispettivamente la superficie laterale ed il volume dell'ogiva. Ma questo è immediato, infatti (v. [1], Cap. 10, §7):

$$S_{lat} = 2\mathbf{p} \int_0^{L_n} y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx \quad 5.11$$

$$V = \mathbf{p} \int_0^{L_n} y^2(x) dx \quad 5.12$$

dove negli integrali a secondo membro la funzione $y(x)$ si deve considerare data dalla 2.4. Calcolando gli integrali in questione si perviene, dopo alcuni passaggi e semplificazioni, alle 4.1 e 4.2 che risultano quindi provate.

NOTA: Come si è detto S_{lat} è la superficie laterale dell'ogiva e quindi se l'ogiva è a terminazione tronca ($D_n \neq 0$), essa non rappresenta la superficie totale esposta all'aria dell'ogiva, cioè la superficie S che racchiude il volume V . Questa è infatti data dalla formula seguente:

$$S = S_{lat} + \frac{\mathbf{p}}{4} D_n^2 \quad 5.13$$

BIBLIOGRAFIA GENERALE

- [1] L. Brasca, "Tavole Matematiche", Ghisetti & Corvi
- [2] N. F. Krasnov, "Aerodynamics of Bodies of Revolution", American Elsevier
- [3] R. L. McCoy, "Modern Exterior Ballistics", Schiffer Publishing Ltd

INDICE GENERALE

1. INTRODUZIONE	1
2. EQUAZIONE DELL'OGIVA	1
3. ANGOLI DI RACCORDO DI UN'OGIVA	3
4. SUPERFICIE LATERALE E VOLUME DI UN'OGIVA	3
5. DIMOSTRAZIONE DELLE FORMULE DEI PARAGRAFI PRECEDENTI	4
BIBLIOGRAFIA GENERALE	7