M. G. BUSATO

GIUSTIFICAZIONE TEORICA DELLA FORMULA DI PETRY MEDIANTE L'ANALISI DIMENSIONALE

NOTA TECNICA

SOMMARIO

La formula di Petry è una formula semiempirica che consente di stimare, sotto opportune condizioni, la penetrazione di un proiettile in un materiale omogeneo di grande spessore. Nella presente Nota Tecnica, avvalendosi della Analisi Dimensionale, viene avanzata una giustificazione teorica di questa formula, che, come riportato in Appendice 1 ed Appendice 2, risulta anche applicabile ad altre due formule semiempiriche di notevole interesse in Balistica Terminale: la formula standard di penetrazione nel legno di pino e la formula standard di penetrazione nel ferro, nota anche come formula di Krupp. In Appendice 3 è riportata infine una breve analisi dello studio svolto.

GIUSTIFICAZIONE TEORICA DELLA FORMULA DI PETRY MEDIANTE L'ANALISI DIMENSIONALE

La formula di Petry consente di stimare, sotto opportune condizioni, la penetrazione di un proiettile in un corpo omogeneo di grande spessore. Precisamente, si richiede che il corpo presenti una superficie piana e che il proiettile, supposto di tipologia ordinaria, colpisca perpendicolarmente questa superficie (oltre la quale il corpo deve estendersi per uno spessore notevole). Utilizzando le unità metriche decimali, la formula di Petry risulta la seguente:

$$D_{[\mathrm{cm}]} = K_{[\mathrm{cm}^3/\mathrm{gr}]} \frac{P_{[\mathrm{gr}]}}{A_{[\mathrm{cm}^2]}} \log_{10}\left(1 + \frac{v^2_{[\mathrm{m}/s]}}{19974.16}\right) \tag{1}$$

dove:[1]

- $D_{[\mathrm{cm}]}$ penetrazione, espressa in centimetri.
- $K_{[\mathrm{cm}^3/\mathrm{gr}]}$ coefficiente di penetrazione del bersaglio, espresso centimetri quadri per grammo.
- $P_{[\mathrm{gr}]}$ peso del proiettile, espresso in grammi.
- $A_{[\mathrm{cm}^2]}$ area della sezione di riferimento del proiettile, espressa in centimetri quadrati.
- $v_{[\mathrm{m/s}]}$ velocità del proiettile, espressa in metri al secondo.

Qui di seguito sono riportati a titolo di esempio i valori del coefficiente $K_{[\mathrm{cm}^3/\mathrm{gr}]}$ relativi ad alcuni materiali di impiego frequente. Questi valori sono stati dedotti sperimentalmente e sono una media statistica dei risultati ottenuti.

tipo di materiale	$K_{[\mathrm{cm}^3/\mathrm{gr}]}$
Acciaio	0.016
Lega di acciaio	0.025
Pietra calcarea	0.336
Muratura in calcestruzzo normale	0.499
Muratura in pietra	0.732
Muratura in mattoni	1.278
Terreno sabbioso	2.291
Terreno compatto	3.009
Terreno soffice	4.569

Tabella 1

In pratica la formula di Petry fornisce valori attendibili della penetrazione solo se lo spessore del bersaglio è almeno tre volte il valore della penetrazione calcolata. In caso contrario l'esperienza mostra che la penetrazione effettiva è maggiore di quella calcolata. La formula inoltre risulta più accurata nel caso delle murature e dei terreni.

La formula di Petry è una formula empirica. Tuttavia per essa si può trovare una giustificazione fisica avvalendosi della Analisi Dimensionale. Consideriamo un parallelepipedo rettangolo di grandi

[1] Se C è il calibro del proiettile allora per convenzione: $A = \pi / 4\, C^2$.

dimensioni formato da un materiale omogeneo e supponiamo che tale parallelepipedo venga colpito da un proiettile perpendicolarmente ad una sua faccia. Allora è ragionevole assumere che per una data tipologia di proiettile il valore D della penetrazione dipenda dai seguenti fattori:

- La velocità v del proiettile.
- Il peso P del proiettile.
- L'area A della sezione di riferimento del proiettile.
- Un parametro U che esprima le caratteristiche meccaniche del materiale costituente il proiettile in relazione alla sua capacità di penetrazione.
- Un parametro S che esprima le caratteristiche meccaniche del materiale costituente il bersaglio in relazione alla sua resistenza alla penetrazione.

Assumiamo dunque che le grandezze fisiche coinvolte nel fenomeno siano le seguenti sei: D, P, v, A, U, S ed applichiamo le tecniche della Analisi Dimensionale. Chiaramente:

$$[D] = L \tag{2}$$

$$[v] = \frac{L}{T} \tag{3}$$

$$[P] = \frac{ML}{T^2} \tag{4}$$

$$[A] = L^2 \tag{5}$$

Occorre ora precisare le grandezze U ed S. Appare ragionevole identificare U con l'energia di deformazione per unità di massa. Possiamo quindi assumere:

$$U = \frac{U_V}{\rho} \tag{6}$$

dove con U_V e con ρ si sono indicate rispettivamente l'energia di deformazione per unità di volume la densità del materiale costituente il proiettile. Come si vede, U è tanto minore quanto più ρ è grande (materiale molto denso) ed U_V è piccolo (materiale molto rigido[2]). Appare altresì ragionevole identificare S con la forza per unità di superficie necessaria a produrre una penetrazione di lunghezza unitaria nel bersaglio. Chiaramente, più S è grande, meno penetrabile è il bersaglio. Con le assunzioni fatte si ha allora:

$$[U] = \frac{L^2}{T^2} \tag{7}$$

$$[S] = \frac{M}{L^2T^2} \tag{8}$$

Utilizzando come grandezze fondamentali v, P ed A, i numeri P-greco associati alle altre grandezze caratteristiche del fenomeno sono:

---

[2] Infatti se l'energia di deformazione per unità di volume è piccola, per ottenere una deformazione assegnata occorre una sollecitazione molto grande.

$$\Pi_D = \frac{D}{\sqrt{A}} \tag{9}$$

$$\Pi_U = \frac{U}{v^2} \tag{10}$$

$$\Pi_S = \frac{S A \sqrt{A}}{P} \tag{11}$$

Possiamo quindi concludere che con le ipotesi da noi assunte il valore di D deve essere rappresentato da una formula del tipo seguente:

$$D = \sqrt{A}\ F(\Pi_U, \Pi_S) \tag{12}$$

dove F è una funzione la cui espressione dipende unicamente dalla geometria del proiettile. E' chiaro che D dovrà aumentare al diminuire di Π_U e di Π_S in quanto la penetrazione è manifestamente maggiore quando: U è piccolo; v è grande; S è piccolo; A è piccolo; P è grande. Ciò, ricordando la (10) e la (11), conduce allora ad assumere per D in luogo della (12) la formula generale seguente:

$$D = \sqrt{A}\ f\left(\frac{v^2}{U}, \frac{P}{S A \sqrt{A}}\right) \tag{13}$$

dove f è una funzione strettamente crescente di entrambe le variabili da cui dipende. Chiaramente, con le ipotesi da noi assunte, la forma esplicita della funzione f è unicamente determinata dalla geometria del proiettile: sole considerazioni di Analisi Dimensionale non consentono tuttavia di ottenerla.

Come si vede, la formula di Petry rientra nella forma generale (13). Essa infatti si ottiene dalla (13) ponendo:

$$K = \frac{1}{S} \tag{14}$$

ed assumendo (con le unità di misura da noi adottate):

$$U = 19974.16 \text{ m/s} \tag{15}$$

$$f\left(\frac{v^2}{U}, \frac{P}{S A \sqrt{A}}\right) = \frac{P}{S A \sqrt{A}} \log_{10}\left(1 + \frac{v^2}{U}\right) \tag{16}$$

In linea di principio, senza ulteriori riscontri sperimentali, la (16) si deve considerare valida unicamente per il valore fissato di U. Essa comunque può fornire un'idea di come il valore di D possa dipendere dal tipo di materiale che costituisce il proiettile.

APPENDICE 1 La formula standard di penetrazione nel legno di pino

La formula standard per la penetrazione nel legno di pino di un proiettile di tipo ordinario ha una espressione del tipo seguente:(3)

$$D = \text{cost}\ \frac{P\,v^{3/2}}{A} \qquad \text{A1.1}$$

dove "cost" è una costante dimensionale il cui valore dipende dalle unità di misura adottate per e-sprimere D, P, A e v; si ha, usando le unità indicate:

$$D_{[\mathrm{cm}]} = 0.02356\ \frac{P_{[\mathrm{gr}]}\,v^{3/2}_{[\mathrm{m/s}]}}{A_{[\mathrm{mm}^2]}} \qquad \text{A1.2}$$

E' facile vedere che anche la A1.1 rientra nella forma generale (13), per cui possiamo concludere che anche il fenomeno ora in esame può essere fisicamente spiegato con lo schema da noi adottato. Infatti, assumendo:

$$f\left(\frac{v^2}{U}, \frac{P}{S\,A\sqrt{A}}\right) = \Lambda \frac{P}{S\,A\sqrt{A}} \left(\frac{v^2}{U}\right)^{\frac{3}{4}} \qquad \text{A1.3}$$

dove Λ è una costante numerica di normalizzazione e tenendo conto che nel caso ora in esame oltre ad U deve considerarsi noto anche S (il materiale del bersaglio infatti è noto), la (13) fornisce per D una espressione della forma A1.1. Si ha:

$$\text{cost} = \frac{\Lambda}{S\,U^{3/4}} \qquad \text{A1.4}$$

Questa relazione dà una idea di come il valore di D possa dipendere dal tipo di materiale che costituisce il proiettile (tramite U) ed il bersaglio (tramite S).

----

[3] Si veda www.earmi.it (pagina dedicata alla balistica terminale).

APPENDICE 2 La formula standard di penetrazione nel ferro (formula di Krupp)

La formula standard per la penetrazione nel ferro di un proiettile di tipo ordinario (formula di Krupp) ha una espressione del tipo seguente:[(4)]

$$D = \text{cost}\sqrt[4]{\frac{P^3 v^6}{A^{5/2}}} \qquad \text{A2.1}$$

dove "cost" è una costante dimensionale il cui valore dipende dalle unità di misura adottate per e-sprimere D, P, A e v; si ha, usando le unità indicate:

$$D_{[\text{mm}]} = 1.00627 \cdot 10^{-3} \sqrt[4]{\frac{P^3_{[\text{gr}]}\, v^6_{[\text{m/s}]}}{A^{5/2}_{[\text{mm}^2]}}} \qquad \text{A2.2}$$

E' facile vedere che anche la A2.1 rientra nella forma generale (13), per cui possiamo concludere che anche il fenomeno ora in esame può essere fisicamente spiegato con lo schema da noi adottato. Infatti, assumendo:

$$f\left(\frac{v^2}{U}, \frac{P}{S\,A\sqrt{A}}\right) = \Lambda \left(\frac{P}{S\,A\sqrt{A}}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{v^2}{U}\right)^{\frac{3}{4}} \qquad \text{A2.3}$$

dove Λ è una costante numerica di normalizzazione e tenendo conto che nel caso ora in esame oltre a U deve considerarsi noto anche S (il materiale del bersaglio infatti è noto), la (13) fornisce per D una espressione della forma A2.1. Si ha:

$$\text{cost} = \frac{\Lambda}{(S\,U)^{3/4}} \qquad \text{A2.4}$$

Questa relazione dà una idea di come il valore di D possa dipendere dal tipo di materiale che costi-tuisce il proiettile (tramite U) ed il bersaglio (tramite S).

----

4) Si veda www.earmi.it (pagina dedicata alla balistica terminale).

APPENDICE 3 Osservazioni conclusive

Con le ipotesi da noi assunte, la forma esplicita della funzione f che compare nella (13) è unicamente determinata dalla geometria del proiettile. Per proiettili tipologicamente simili le formule di penetrazione inquadrabili nella teoria utilizzata, dovrebbero quindi avere tutte la stessa espressione. Confrontando (16) con la A1.3 e la A2.3 si vede tuttavia che questa circostanza non è verificata. Si è trovato infatti che:

$$f(u_1, u_2) = u_2 \log_{10}(1 + u_1) \qquad \text{per la formula di Petry} \qquad \text{A3.1}$$

$$f(u_1, u_2) = \Lambda\, u_2 u_1^{3/4} \qquad \text{per la formula standard di penetrazione nel legno di pino} \qquad \text{A3.2}$$

$$f(u_1, u_2) = \Lambda\, (u_2 u_1)^{3/4} \qquad \text{per la formula standard di penetrazione nel ferro} \qquad \text{A3.3}$$

Ammettendo valide le ipotesi da noi assunte, questo fatto può essere giustificato in due modi e precisamente ritenendo che:

(a) Le formule in oggetto siano state ricavate utilizzando proiettili di tipologia fra loro differente.

(b) Le formule in oggetto siano state adattate in modo tale da poterle applicare in una ampia tipologia di casi e che quindi costituiscono una interpolazione della funzione di penetrazione specifica di una fissata tipologia di proiettile.

Una analisi più accurata di queste problematiche che peraltro richiederebbe l'acquisizione dei campi di validità delle formule in oggetto, esula tuttavia dai fini del presente scritto e pertanto non verrà compiuta in questa sede.
