

M. G. BUSATO

**CALCOLO DEL FATTORE DI FORMA
DI UN PROIETTILE PER MEZZO
DI TAVOLE BALISTICHE**

TEORIA BASATA SUL MODELLO DEL PUNTO MATERIALE

SOMMARIO

In questo scritto viene ricavata una formula per calcolare per mezzo di tavole balistiche accurate il fattore di forma di un proiettile. Si assume che per descrivere il moto del proiettile sia adottato il cosiddetto modello del punto materiale o modello euleriano, per la descrizione del quale si rimanda alla letteratura specializzata. La formula ricavata consente anche di effettuare un controllo sulla accuratezza dei calcoli numerici inerenti l'integrazione delle equazioni del moto del proiettile.

1. RESISTENZA AERODINAMICA

Quando per descrivere il moto di un proiettile si adotta il modello del punto materiale,⁽¹⁾ l'azione dell'aria sul proiettile è identificata con la sola resistenza aerodinamica F_D . Questa, che per definizione è una forza costantemente opposta alla velocità v di avanzamento del proiettile:

$$\mathbf{F}_D = -F_D \hat{\mathbf{v}} \quad 1.1$$

dove con $\hat{\mathbf{v}}$ si è indicato il versore di \mathbf{v} , risulta avere nel caso in esame una intensità F_D esprimibile attraverso la formula seguente:⁽²⁾

$$F_D = \frac{\pi}{8} C_D \rho v^2 D^2 \quad 1.2$$

in cui C_D è un numero puro il cui valore dipende esclusivamente dalla velocità di avanzamento del proiettile espressa in numero di M e dalla forma del proiettile stesso⁽³⁾; esso prende il nome di *coefficiente di drag*, ρ è la densità dell'aria alla quota in cui si trova il proiettile e D è il calibro del proiettile.

La 1.2 è l'espressione della resistenza aerodinamica solitamente adottata in aerotecnica. In balistica però si preferiscono spesso utilizzare, per ragioni legate alla integrazione delle equazioni del moto, espressioni di F_D leggermente diverse dalla 1.2. Di queste espressioni ne esistono parecchie nella letteratura specialistica; qui citiamo solo la seguente di derivazione americana:

$$F_D = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{m}{C_b} G \quad 1.3$$

dove ρ_0 è la densità dell'aria alla quota di riferimento (solitamente il livello del mare), m è la massa del proiettile, C_b è il cosiddetto *coefficiente balistico* (un numero puro) e G è la cosiddetta *funzione di ritardazione* (avente le dimensioni di una accelerazione). Nella 1.3 il coefficiente balistico è in pratica un "parametro libero" e quindi può essere fissato ad arbitrio. E' convenzione assumere:

$$C_b = k \frac{m}{D^2} \quad 1.4$$

in cui k è una costante avente le dimensioni di una superficie per unità di massa (ricordiamo che C_b è un numero puro). Il valore di k viene scelto in modo da semplificare i calcoli numerici: nella standardizzazione americana si assume $k = 1.422/1000 \text{ m}^2/\text{Kg}$. Una volta fissato il coefficiente balistico, risulta univocamente determinata la funzione di ritardazione. Essa, giocando nella 1.3 lo stesso ruolo che gioca il coefficiente di drag nella 1.2, risulta nelle ipotesi da noi adottate, una funzione

¹⁾ Per maggiori dettagli su questo modello si rimanda alla letteratura specializzata (v. ad esempio [3] e [6]).

²⁾ La 1.2 si ottiene con i metodi della Analisi Dimensionale sotto le ipotesi del modello da noi adottato per descrivere il moto del proiettile (modello del punto materiale). Solitamente nei testi di Fluidodinamica la 1.2 è scritta nella forma: $F_D = 1/2 C_D \rho v^2 A$ dove A è una sezione convenzionale di riferimento propria del corpo che si considera. Il coefficiente $\pi/8$ che compare nella 1.2 deriva dall'aver rappresentato per mezzo del calibro la sezione convenzionale A universalmente utilizzata per i proiettili (area della sezione trasversale).

³⁾ Per definizione: $M = v/a$ dove a è la velocità del suono alla quota in cui si trova il proiettile.

dalla sola velocità di avanzamento del proiettile espressa in numero di M e della forma del proiettile stesso.

Confrontando la 1.3 con la 1.2 si trova la relazione che lega fra loro per una fissata tipologia di proiettili il coefficiente di drag e la funzione di ritardazione. Si ha:

$$G = \frac{\pi}{8} \frac{C_b}{m} \rho_0 v^2 D^2 C_D \quad 1.5$$

Esplicitando nella 1.5 il coefficiente balistico per mezzo della 1.4 la 1.5 fornisce:

$$G = \frac{\pi}{8} k \rho_0 v^2 C_D \quad 1.6$$

Questa è la relazione solitamente adottata in balistica per ottenere la funzione di ritardazione noto che sia il coefficiente di drag.

2. IL FATTORE DI FORMA

Come si è detto il coefficiente di drag C_D dipende dalla forma del proiettile e quindi è specifico di una data tipologia di proiettili. Tuttavia è chiaro che il coefficiente di drag di una data tipologia di proiettili può sempre ottenersi dalla conoscenza del coefficiente di drag \bar{C}_D di una specifica tipologia di proiettili campione, per mezzo della formula seguente:

$$C_D = i \bar{C}_D \quad 2.1$$

dove i è quella particolare funzione del numero di Mach che moltiplicando \bar{C}_D fornisce C_D . Essa prende il nome di *fattore di forma* associato al coefficiente di drag campione \bar{C}_D ed è chiaramente una grandezza adimensionale (cioè un numero puro).

L'introduzione del fattore di forma è una consuetudine balistica comoda nelle applicazioni in quanto l'esperienza mostra che per tipologie di proiettili simili e medesime condizioni di sparo (cioè velocità iniziale e angolo di tiro), il valore di i si può ritenere costante con buona approssimazione e prossimo ad 1. Avvalendosi della 2.1 la 1.2 fornisce:

$$F_D = \frac{\pi}{8} \rho v^2 D^2 i \bar{C}_D \quad 2.2$$

dove \bar{C}_D è un coefficiente di drag standard, valido per proiettili campione. Questa è la formula solitamente adottata in balistica per rappresentare la resistenza aerodinamica.

3. DETERMINAZIONE SPERIMENTALE DEL FATTORE DI FORMA

Il fattore di forma i associato ad un fissato coefficiente di drag standard \bar{C}_D può essere rigorosamente calcolato utilizzando accurate tavole balistiche. Ciò consente poi di ottenere tramite la 2.1

anche il coefficiente di drag valido per la tipologia di proiettili alla quale appartiene quello a cui si riferisce la tavola balistica utilizzata.

Per dimostrare questa circostanza ed ottenere la formula esplicita per il calcolo del fattore i , scriviamo l'equazione del bilancio energetico del proiettile secondo il modello da noi adottato (solo per il quale peraltro è a rigore valido rappresentare F_D per mezzo della 1.2). In ogni istante la variazione di energia cinetica e di energia potenziale deve essere uguale al lavoro compiuto dalla forza F_D ; scriviamo quindi:

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) + mgdz = -F_D ds \quad 3.1$$

dove z è la quota del proiettile, g è l'accelerazione di gravità alla quota z e ds è l'elemento di lunghezza d'arco della traiettoria. Calcolando il differenziale dell'energia cinetica, dalla 3.1 si ottiene:

$$mv dv + mgdz = -F_D ds \quad 3.2$$

ovvero, ricordando che:

$$ds = v dt \quad 3.3$$

e dividendo ambo i membri per dt :

$$m \frac{dv}{dt} + mg \frac{1}{v} \frac{dz}{dt} = -F_D \quad 3.4$$

Ma per definizione:

$$\frac{dz}{dt} = v \sin \theta \quad 3.5$$

dove θ è l'angolo che il vettore velocità \mathbf{v} di avanzamento del proiettile forma con la direzione di avanzamento orizzontale del proiettile stesso (l'asse x). La 3.4 può quindi scriversi nella forma:

$$F_D = -m \left[\frac{dv}{dt} + g \sin \theta \right] \quad 3.6$$

Esprimendo F_D per mezzo della 2.2 ed esplicitando i si ottiene allora la seguente formula che fornisce il fattore di forma i in funzione dei parametri dimensionali del proiettile (massa m e calibro D) e dei valori istantanei di z , v , θ e dv/dt (dalla cui conoscenza si possono poi ottenere i valori di ρ , g ed M , e quindi, noto quest'ultimo, il valore di \overline{C}_D):

$$i = -\frac{8}{\pi} \frac{1}{\rho v^2 \overline{C}_D} \frac{m}{D^2} \left[\frac{dv}{dt} + g \sin \theta \right] \quad 3.7$$

Questa è la formula cercata, alla quale si faceva riferimento all'inizio del presente paragrafo. Chiaramente, se nella 3.7 si sostituisce \overline{C}_D con la corrispondente funzione di ritardazione \overline{G} data dalla 1.6, si ottiene allora per i la seguente espressione:

$$i = -k \frac{\rho_0}{\rho} \frac{m}{D^2} \frac{1}{G} \left[\frac{dv}{dt} + g \sin \theta \right] \quad 3.8$$

Come si vede, una volta fissato un modello di atmosfera, così che siano definiti i valori della densità dell'aria ρ e della velocità del suono a per ogni valore di z , e la precisione con la quale si intende rappresentare l'accelerazione di gravità g , l'uso di una tavola balistica che contenga i valori istantanei di z , v , θ , e dv/dt in una successione di istanti successivi equidistanti:

$$t_{h+1} = t_h + \Delta t \quad (h = 0, 1, 2, \dots; t_0 = 0) \quad 3.9$$

consente di calcolare immediatamente il valore istantaneo di i per tutti i valori di M ottenibili dai dati riportati nella tavola balistica stessa. Spesso tuttavia le tavole balistiche non riportano il valore di dv/dt , cioè della decelerazione del proiettile e quindi occorre eseguirne una stima.⁽⁴⁾ Per stimare dv/dt nell'istante t_h si può usare la semplicissima formula approssimata:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t_h} \approx \frac{v_{h+1} - v_h}{\Delta t} \quad 3.9$$

dove v_h è la velocità del proiettile all'istante t_h e v_{h+1} è la velocità del proiettile all'istante t_{h+1} ($\Delta t = t_{h+1} - t_h$). Una stima migliore di dv/dt nell'istante t_h è però quella che si ottiene dalla formula di interpolazione di Lagrange per tre punti. Essa è la seguente:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=t_h} \approx \frac{v_{h+1} - v_{h-1}}{2 \Delta t} \quad 3.10$$

dove v_{h-1} è la velocità del proiettile all'istante t_{h-1} e v_{h+1} è la velocità del proiettile all'istante t_{h+1} . La 3.9 infatti, può condurre ad errori grossolani se la variazione di v è rapida dell'intervallo Δt (cosa che solitamente avviene nei primi istanti successivi allo sparo). Si noti tuttavia che la 3.10 non è applicabile nell'istante iniziale. In questo caso essa deve essere sostituita dalla seguente:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} \approx \frac{-3v_0 + 4v_1 - v_2}{2 \Delta t} \quad 3.11$$

dove v_0, v_1, v_2 sono la velocità del proiettile rispettivamente negli istanti $t_0 = 0, t_1 = \Delta t$ e $t_2 = 2\Delta t$.

Concludiamo il paragrafo con le seguenti tre osservazioni:

- (1) La formula 3.7 (o 3.8) può chiaramente essere utilizzata in corrispondenza dei valori iniziali del moto del proiettile; in questo caso allora z è l'altitudine del sito, v è la velocità di sparo e θ è l'angolo di tiro.
- (2) In alcune situazioni particolari come ad esempio nel caso di tiri con alzo molto limitato, la formula 3.7 (o 3.8) può essere semplificata. Se infatti θ è piccolo si può omettere il termine contenente $\sin \theta$. La formula 3.8 consente poi un'ulteriore semplificazione, infatti se le quote raggiunte dal proiettile non sono mai troppo elevate si può assumere $\rho_0 / \rho = 1$.

⁴⁾ Per maggiori dettagli sull'argomento si veda [4], [5] e [6].

(3) La formula 3.7 (o 3.8) può essere usata per effettuare un controllo sulla accuratezza dei calcoli numerici inerenti l'integrazione delle equazioni del moto di un proiettile del quale si conosce il coefficiente di drag. Inserendo infatti nella 3.7 (o 3.8) i valori di z , v , θ , e dv/dt ottenuti integrando numericamente le equazioni del moto, deve ritrovarsi il fattore di forma usato nelle equazioni del moto stesse.

4. ESEMPIO NUMERICO

Consideriamo un proiettile di peso 8 Kg_f ($m = 8$ Kg), calibro 105 mm ($D = 0.105$ m) e coefficiente di drag C_D corrispondente alla funzione di ritardazione americana G_2 . Assumiamo quindi le seguenti condizioni di tiro: velocità iniziale $v_0 = 1400$ m/s, angolo di tiro $\theta_0 = 21^\circ$. Adottiamo infine come coefficiente di drag standard \bar{C}_D quello corrispondente alla funzione di ritardazione americana G_6 .

Un calcolo numerico delle equazioni del moto del proiettile (nelle quali come coefficiente di drag si deve usare C_D , non \bar{C}_D) fornisce i dati riportati nella seguente tabella (relativa all'istante $t = 13$ s).⁽⁵⁾

t (s)	z (m)	v (m/s)	θ (deg)	dv/dt (m/s ²)
13	2606.33	322.497	8.4083	-20.3218

Tabella 4.1

Dalla conoscenza di z si possono calcolare i valori di ρ (densità dell'aria alla quota z), a (velocità del suono alla quota z) e g (accelerazione di gravità alla quota z). Usando per l'aria il modello US-SA 76 e per g l'espressione ordinaria del modello da noi adottato (modello del punto materiale), si ottengono per le grandezze in questione i valori qui di seguito riportati:

ρ (Kg/m ³)	a (m/s ²)	g (m/s ²)
0.94665	330.052	9.79861

Tabella 4.2

Dalla conoscenza di v ed a si ottiene poi il valore numero di Mach in corrispondenza del quale calcolare il valore di \bar{C}_D . Si ha:

$$M = 0.9771 \quad 4.1$$

da cui segue:

$$\bar{C}_D = 0.31764 \quad 4.2$$

La formula 3.7 fornisce allora:

⁵⁾ Il calcolo può essere eseguito utilizzando il programma Total Ballistics scaricabile dai siti www.mgbstudio.net e www.earmi.it. In un breve articolo allegato al programma si trovano riportate le tecniche numeriche utilizzate nel programma stesso, le formule per calcolare i valori di ρ , a e g alla generica quota e la definizione dei coefficienti di drag corrispondenti alle funzioni di ritardazione più comunemente usate, fra cui quelle considerate nel presente esempio.

$$i = 1.11604$$

4.3

Possiamo quindi concludere che il valore del coefficiente di drag del tipo di proiettile in esame è, per $M = 0.9771$:

$$C_D = 1.11604 \bar{C}_D$$

4.4

Un calcolo diretto mostra l'esattezza di questo risultato (nel caso in esame anche C_D è noto).

Ripetendo il calcolo ora mostrato per le varie righe di una tavola balistica del tipo indicato nella Tabella 4.1, si può ottenere una tabulazione del coefficiente di drag C_D del proiettile che si considera, valida (nella approssimazione del modello adottato) per qualsiasi proiettile di identica tipologia (cioè indipendentemente dalla sue dimensione) e per qualsiasi condizione di tiro. Ricordiamo infatti, il valore del coefficiente C_D dipende unicamente dal numero di Mach e dalla forma del proiettile. Tornando al nostro esempio, poiché conosciamo il coefficiente C_D possiamo confrontare il grafico reale di i con i valori ottenuti tramite la 3.7 per mezzo di una tavola balistica accurata. Il risultato che si ottiene è riportato nel seguente Figura 4.1. Chiaramente, con i valori adottati di v_0 e θ_0 può essere ricoperto solo un determinato intervallo di valori di M .

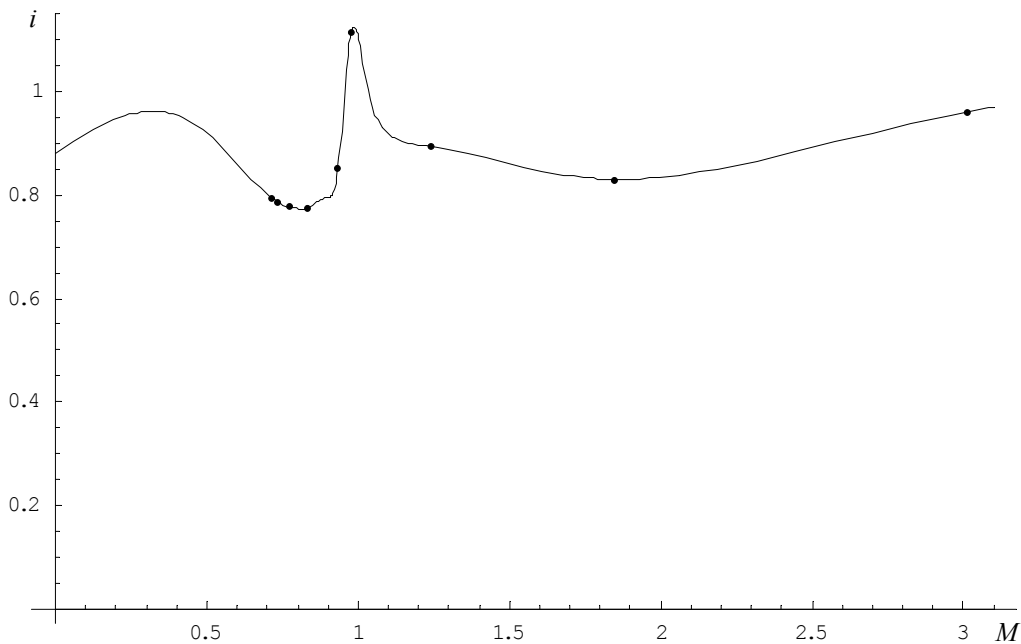


Figura 4.1

Come si vede dalla Figura 4.1, nella regione transonica occorre sempre una accurata scelta dei punti di tabulazione, oppure una tabulazione fitta. Per farsi un'idea degli istanti in corrispondenza dei quali è necessario infittire la tabulazione ci si può avvalere di un diagramma del tipo di quello riportato in Figura 4.2, in cui è mostrato l'andamento della velocità del proiettile espressa in numeri di Mach in funzione del tempo. Le righe blu delimitano la fascia transonica ($0.8 \leq M \leq 1.2$) mentre la riga rossa (riga centrale) corrisponde a $M = 1$.

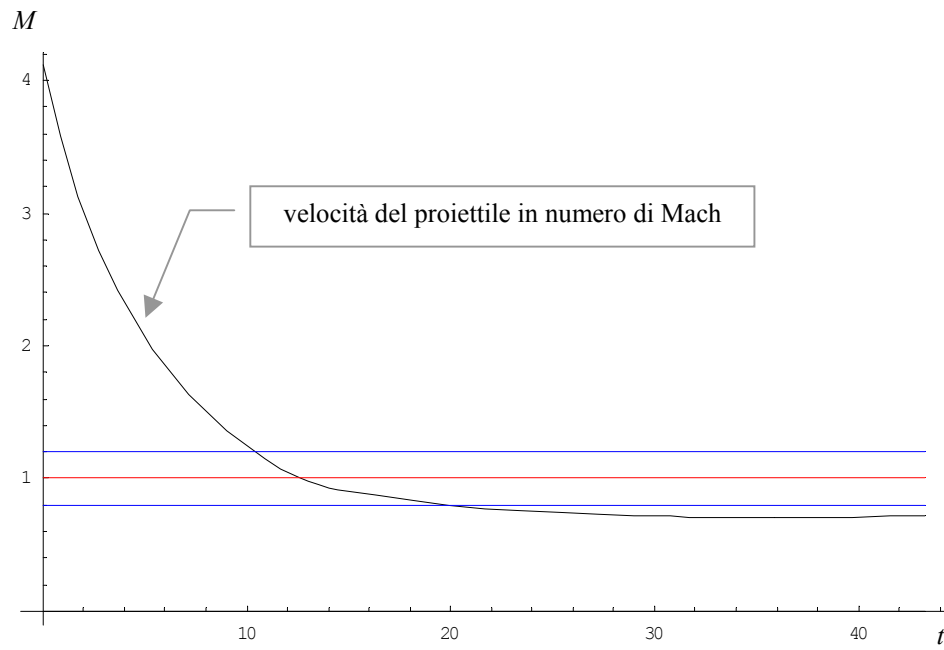


Figura 4.2

BIBLIOGRAFIA GENERALE

- [1] E. Mattioli, Aerodinamica, Levrotto & Bella.
- [2] T. Levi-Civita, U. Amaldi, “Lezioni di Meccanica Razionale”, Vol. 1, Vol. 2 Parte I, Vol. 2 Parte II, Zanichelli.
- [3] R. L. McCoy, “Modern Exterior Ballistics”, Schiffer Publishing Ltd.
- [4] F. Schedi, Analisi Numerica, ETAS Libri Collana Schaum.
- [5] T. Zeuli, Introduzione ai Calcoli Numerici e Grafici, Edizioni Gheroni.
- [6] www.mgbstudio.net (Fisica Matematica / Scritti Tecnici)
- [7] www.earmi.it (e link indicati in questo sito)