M. G. BUSATO

LA FORZA GRAVITAZIONALE AGENTE SU UN PROIETTILE IN VOLO

SOMMARIO

In questo scritto viene determinata l’espressione generale della forza gravitazionale agente su un proiettile in volo e ne vengono successivamente ottenute diverse approssimazioni. Dopo avere inquadrato il problema generale del moto di un proiettile di massa costante, richiamandone le equazioni del moto, ed avere esposto le principali proprietà del potenziale gravitazionale terrestre, si perviene alla caratterizzazione della forza gravitazionale agente su un corpo solido nella cosiddetta approssimazione newtoniana e si determina tale forza, in varie approssimazioni, rispetto al sistema i coordinate cartesiane ortogonali usualmente adottato per studiare il moto di un proiettile in volo.

1. INTRODUZIONE

I proiettili sono solidi di rotazione di forma aerodinamica, eventualmente dotati di una alettatura posteriore. La seguente Figura 1.1 mostra schematicamente un tipico proiettile moderno di artiglieria ed un tipico proiettile con alettatura posteriore, dotato di propulsione autonoma. Questo secondo caso non sarà però trattato nel presente scritto.

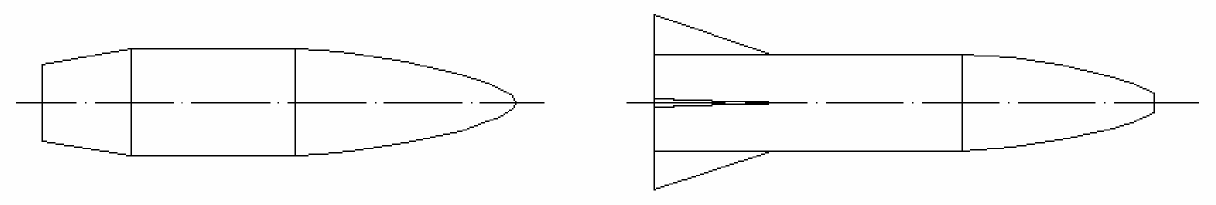

Figura 1.1

Come per ogni corpo solido, la posizione nello spazio di un proiettile risulta individuata quando rispetto ad una terna di riferimento assegnata (fissa o in movimento con legge nota rispetto ad un riferimento inerziale), che indicheremo con $\{S\}$, è nota la posizione del suo centro di massa (che indicheremo con G) e la sua orientazione. Per individuare nello spazio un proiettile occorrono quindi due terne di assi coordinati: la terna $\{S\}$ ed una terna solidale al proiettile (e quindi mobile) che indicheremo con $\{S'\}$ e che conviene scegliere con origine in G ed assi coincidenti con gli assi principali d'inerzia del proiettile stesso. Così facendo infatti, la posizione di G è fornita rispetto alla terna $\{S\}$ dal vettore:

$$\mathbf{r} = G - O \qquad 1.1$$

dove con O si è indicata l'origine di $\{S\}$, mentre l'orientazione del proiettile è fornita dai tre angoli che individuano l'orientazione della terna $\{S'\}$ rispetto alla terna $\{S\}$. Il moto del proiettile è completamente individuato, come quello di un qualsiasi corpo solido, dalla conoscenza, rispetto ad un sistema di riferimento inerziale $\{\overline{S}\}$, della velocità del suo centro di massa G (che indicheremo con $\overline{\mathbf{v}}$) e della sua velocità angolare (che indicheremo con $\overline{w}$). Infatti, poiché il moto di $\{S\}$ si suppone conosciuto rispetto ad $\{\overline{S}\}$, una volta noto il vettore $\overline{\mathbf{v}}$ si può ottenere la velocità di G rispetto ad $\{S\}$ (che indicheremo con $\mathbf{v}$) e quindi la conoscenza in ogni istante del vettore $\mathbf{v}$ (derivata rispetto al tempo del vettore $\mathbf{r}$) mentre noto il vettore $\overline{w}$ che caratterizza il moto rotatorio di $\{S'\}$ rispetto ad $\{\overline{S}\}$, si può ottenere la conoscenza in ogni istante della orientazione di $\{S'\}$ rispetto ad $\{\overline{S}\}$ e di conseguenza l'orientazione di $\{S'\}$ rispetto ad $\{S\}$. I vettori $\overline{\mathbf{v}}$ ed $\overline{w}$ (di significato fisico ben preciso) si ottengono integrando le cosiddette equazioni cardinali del moto, le quali possono essere scritte relativamente a qualsiasi sistema di riferimento, cioè rappresentando i vettori $\overline{\mathbf{v}}$ ed $\overline{w}$ rispetto ad una terna arbitraria. Tali equazioni legano in modo differenziale la quantità di moto $\overline{\mathbf{Q}}$ ed il momento angolare $\overline{\mathbf{K}}$ del proiettile rispetto a $\{\overline{S}\}$ (che sono rispettivamente una funzione di $\overline{\mathbf{v}}$ ed una funzione di $\overline{w}$) alle azioni esterne agenti sul proiettile stesso. Nel sistema di riferimento $\{\overline{S}\}$ le equazioni cardinali del moto hanno la forma seguente:

$$\frac{d\bar{\mathbf{Q}}}{dt} = \mathbf{F}_{est} \qquad 1.2$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{K}}}{dt} = \mathbf{M}_{est} \qquad 1.3$$

dove $\mathbf{F}_{est}$ ed $\mathbf{M}_{est}$ sono la forza totale ed il momento totale esterni agenti sul proiettile. Si suppone che $\bar{\mathbf{K}}$ ed $\mathbf{M}_{est}$ siano calcolati utilizzano come centro di riduzione l'origine di $\{\bar{S}\}$ o il baricentro G del proiettile. Spesso tuttavia è più comodo scrivere le equazioni cardinali del moto relativamente ad un sistema di riferimento diverso da $\{\bar{S}\}$ e non necessariamente il medesimo per entrambe. Ciò che conta infatti è che le equazioni cardinali del moto formino, eventualmente assieme ad opportune equazioni ausiliarie derivanti dall'utilizzo di sistemi di riferimento diversi da $\{\bar{S}\}$, un sistema differenziale chiuso. In alcuni casi inoltre è opportuno utilizzare non la quantità di moto e/o il momento angolare del proiettile rispetto ad $\{\bar{S}\}$, cioè i vettori $\bar{\mathbf{Q}}$ e $\bar{\mathbf{K}}$, ma la quantità di moto e/o il momento angolare del proiettile rispetto al sistema di riferimento utilizzato per scrivere le equazioni cardinali del moto, cioè i vettori ottenibili da $\bar{\mathbf{Q}}$ e $\bar{\mathbf{K}}$ avvalendosi della conoscenza del moto del sistema utilizzato rispetto al sistema $\{\bar{S}\}$. E' chiaro che in tutte queste situazioni le equazioni cardinali del moto assumono una forma differente da quella data dalla 1.2 ed 1.3.

In balistica per determinare il moto di un proiettile si segue proprio un approccio "ibrido" del tipo sopra accennato. Il sistema di riferimento $\{S\}$ rispetto al quale si descrive il moto del centro di massa del proiettile è assunto solidale alla Terra, e quindi mobile di moto conosciuto, con origine nel punto di sparo. Come sistema di riferimento $\{S'\}$ si assume poi quello formato dagli assi principali d'inerzia del proiettile. Si introduce infine un sistema di riferimento ausiliario $\{S_0\}$, inerziale e quindi fisso, coincidente con $\{S\}$ all'istante iniziale dello sparo. La prima equazione cardinale del moto viene scritta relativamente ad $\{S\}$ ed utilizzando proprio il vettore quantità di moto del proiettile rispetto a questo sistema di riferimento (vettore che indicheremo con $\mathbf{Q}$). La seconda equazione cardinale del moto viene scritta invece relativamente ad $\{S_0\}$, utilizzando il vettore momento angolare del proiettile rispetto ad $\{S_0\}$ stesso (cioè il vettore $\bar{\mathbf{K}}$); come centro di riduzione dei momenti si assume il centro di massa del proiettile, cioè il punto G. Con le assunzioni fatte le equazioni cardinali del moto del proiettile assumono allora la forma seguente:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\,W_T \wedge \mathbf{v} - W_T \wedge (W_T \wedge \mathbf{r}) + \frac{1}{m}\mathbf{F}_{est} \qquad 1.4$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{K}}}{dt} = \mathbf{M}_{est} \qquad 1.5$$

dove W_T è la velocità di rotazione assiale della Terra (supposta come è ovvio costante), ed m è la massa del proiettile. Per maggiori dettagli su quanto ora esposto si veda [1], [2], [3].

Le azioni a cui è soggetto un proiettile in volo sono la forza che la Terra esercita su di esso e le forze ed i momenti dovuti alla interazione con l'aria. Quindi in generale la forza complessiva $\mathbf{F}_{est}$ ed il momento complessivo $\mathbf{M}_{est}$ che agiscono su un proiettile in volo avranno la forma seguente (assumendo come centro di riduzione dei momenti il punto G):

$$\mathbf{F}_{\text{est}} = \mathbf{F}_{\text{T}} + \mathbf{F}_{\text{a}} \tag{1.6}$$

$$\mathbf{M}_{\text{est}} = (\mathrm{C}_F - \mathrm{G}) \wedge \mathbf{F}_{\text{est}} + \mathbf{M}_{\text{a}} \tag{1.7}$$

dove:

- $\mathbf{F}_{\text{T}}$ è la forza dovuta all'attrazione della Terra,
- $\mathbf{F}_{\text{a}}$ è la forza dovuta all'interazione con l'aria,
- $\mathbf{M}_{\text{a}}$ è il momento intrinseco dovuto all'interazione con l'aria,
- C_F è il punto di applicazione della forza $\mathbf{F}_{\text{est}}$.

Il punto C_F di applicazione della forza $\mathbf{F}_{\text{est}}$ è determinato dalla conoscenza dei punti di applicazione delle forze $\mathbf{F}_{\text{T}}$ ed $\mathbf{F}_{\text{a}}$. La forza $\mathbf{F}_{\text{T}}$ è applicata al baricentro G del proiettile. La forza $\mathbf{F}_{\text{a}}$ invece risulta applicata in un punto C_{a} del proiettile che dipende anche dall'assetto di volo del proiettile stesso. In pratica quindi l'interazione del proiettile con l'aria risulta caratterizzata da due grandezze: il vettore $\mathbf{F}_{\text{a}}$ ed il punto di applicazione di questo vettore. Tenendo conto di quanto ora detto, la 1.7 si può allora riscrivere nella forma seguente:

$$\mathbf{M}_{\text{est}} = (\mathrm{C}_{\text{a}} - \mathrm{G}) \wedge \mathbf{F}_{\text{a}} + \mathbf{M}_{\text{a}} \tag{1.8}$$

dove C_{a}, $\mathbf{F}_{\text{a}}$ ed $\mathbf{M}_{\text{a}}$ si devono considerare funzioni note dei parametri che caratterizzano l'interazione del proiettile con l'aria. Poiché è difficile ottenere una caratterizzazione della funzione C_{a}, è uso considerare la forza $\mathbf{F}_{\text{a}}$ applicata al baricentro G del proiettile ed introdurre come azione fisica sul proiettile il corrispondente momento di trasporto:

$$\tilde{\mathbf{M}}_{\text{a}} = (\mathrm{C}_{\text{a}} - \mathrm{G}) \wedge \mathbf{F}_{\text{a}} \tag{1.9}$$

Con tale accorgimento la 1.7 fornisce allora:

$$\mathbf{M}_{\text{est}} = \tilde{\mathbf{M}}_{\text{a}} + \mathbf{M}_{\text{a}} \tag{1.10}$$

e quindi, tenendo conto anche della 1.6, le equazioni cardinali del moto 1.4 ed 1.5 assumono la forma seguente:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\mathrm{W}_{\text{T}} \wedge \mathbf{v} - \mathrm{W}_{\text{T}} \wedge (\mathrm{W}_{\text{T}} \wedge \mathbf{r}) + \frac{1}{m}(\mathbf{F}_{\text{T}} + \mathbf{F}_{\text{a}}) \tag{1.11}$$

$$\frac{d\bar{\mathbf{K}}}{dt} = \tilde{\mathbf{M}}_{\text{a}} + \mathbf{M}_{\text{a}} \tag{1.12}$$

dove $\mathbf{F}_{\text{T}}$ e una funzione nota dei parametri che caratterizzano l'attrazione terrestre mentre $\mathbf{F}_{\text{a}}$, $\tilde{\mathbf{M}}_{\text{a}}$ ed $\mathbf{M}_{\text{a}}$ sono funzioni note dei parametri che caratterizzano l'interazione del proiettile con l'aria.

Risulta che per le forze $\mathbf{F}_{\text{T}}$ ed $\mathbf{F}_{\text{a}}$ e per i momenti $\tilde{\mathbf{M}}_{\text{a}}$ ed $\mathbf{M}_{\text{a}}$ è possibile ricondursi ad una espressione del tipo:

$$\mathbf{F}_\mathrm{T} = \mathbf{F}_\mathrm{T}^{(0)} + \text{ termini trascurabili} \qquad 1.13$$

$$\mathbf{F}_\mathrm{a} = \mathbf{F}_\mathrm{a}^{(0)} + \text{ termini trascurabili} \qquad 1.14$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_\mathrm{a} = \tilde{\mathbf{M}}_\mathrm{a}^{(0)} + \text{ termini trascurabili} \qquad 1.15$$

$$\mathbf{M}_\mathrm{a} = \mathbf{M}_\mathrm{a}^{(0)} + \text{ termini trascurabili} \qquad 1.16$$

L'ordine di grandezza dei termini trascurabili stabilisce, unitamente all'ordine di grandezza dei termini che compaiono nella 1.11 per la non inerzialità del riferimento utilizzato, il grado di approssimazione caratteristico di un particolare "modello balistico" e al tempo stesso ne definisce il campo di validità. Così, ad esempio, il cosiddetto "modello balistico euleriano" rientra come caso particolare del modello stabilito dalle equazioni 1.11 ed 1.12 sotto le seguenti ipotesi: (1) Trascurabilità degli effetti legati alla non inerzialità del sistema di riferimento adottato per descrivere il moto del centro di massa del proiettile, (2) Trascurabilità dei momenti $\tilde{\mathbf{M}}_\mathrm{a}$ ed $\mathbf{M}_\mathrm{a}$, (3) Indipendenza della forza $\mathbf{F}_\mathrm{a}$ dalla orientazione e dalla velocità di rotazione del proiettile. Chiaramente, sotto queste ipotesi il proiettile dal punto di vista dinamico risulta assimilato ad un punto materiale e come tale quindi viene identificato. Per maggiori dettagli su quanto ora esposto si veda [3].

In questo scritto determineremo l'espressione della forza $\mathbf{F}_\mathrm{T}$ e ne troveremo le varie approssimazioni utilizzabili a seconda della precisione richiesta. La determinazione della forza $\mathbf{F}_\mathrm{a}$ e dei momenti $\tilde{\mathbf{M}}_\mathrm{a}$ ed $\mathbf{M}_\mathrm{a}$ è invece compiuta in [4].

2. IL POTENZIALE GRAVITAZIONALE TERRESTRE

Sia M_T la massa della Terra:

$$M_\mathrm{T} = 5.9736 \cdot 10^{24} \text{ Kg} \qquad 2.1$$

ed R_T un suo raggio arbitrario. Si può dimostrare allora (v. [5], Appendice 2) che il potenziale gravitazionale terrestre in un punto esterno alla Terra individuato dalle coordinate r (distanza dal centro della Terra), F (latitudine geografica), L (longitudine geografica), risulta dato da:

$$U = \frac{G M_\mathrm{T}}{r} \left[1 + \tilde{U}(r, F, L) \right] \qquad 2.2$$

dove G è la costante di gravitazione universale:

$$G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ Kg m}^3 \text{ s}^{-2} \qquad 2.3$$

mentre:

$$\tilde{U}(r, F, L) = \frac{1}{2} J_2 \left(\frac{R_\mathrm{T}}{r} \right)^2 (1 - 3\sin^2 F) + \text{termini trascurabili} \qquad 2.4$$

Nella 2.4 J_2 è il primo *coefficiente armonico zonale* il cui valore viene determinato sperimentalmente e dipende dal valore considerato di R_{T}, in quanto si dimostra che:

$$J_2 = \frac{1}{R_{\mathrm{T}}^2}\left[K_{z'} - \frac{1}{2}(K_{x'} + K_{y'})\right] \qquad 2.5$$

dove con $K_{x'}, K_{y'}, K_{z'}$ si sono indicati i momenti di inerzia per unità di massa della Terra rispetto ad una terna di assi cartesiani ortogonali baricentrici, fissati convenzionalmente. Si può dimostrare inoltre che J_2 è praticamente indipendente dalla rotazione della Terra attorno al proprio asse, per cui, a meno dei "termini trascurabili" omessi a secondo membro della 2.4, il potenziale gravitazionale terrestre in un fissato punto esterno alla Terra non dipende dal tempo. Questa è una proprietà del potenziale gravitazionale terrestre molto importante in dinamica del volo spaziale e per questo l'abbiamo citata, ma non riveste interesse in balistica. Se R_{T} si identifica con il raggio medio terrestre, cioè si pone $R_{\mathrm{T}} = 6.371 \cdot 10^6$ m, allora valutando $K_{x'}, K_{y'}, K_{z'}$ rispetto agli assi principali d'inerzia della Terra, si trova:

$$J_2 = 1.0851 \cdot 10^{-3} \qquad (\text{caso } R_{\mathrm{T}} = 6.371 \cdot 10^6 \text{ m}) \qquad 2.6$$

Se invece, come più spesso avviene, R_{T} si identifica con il raggio medio terrestre alla latitudine di 45°, cioè si pone $R_{\mathrm{T}} = 6.375 \cdot 10^6$ m, allora sempre valutando $K_{x'}, K_{y'}, K_{z'}$ rispetto agli assi principali d'inerzia della Terra, risulta:

$$J_2 = 1.0837 \cdot 10^{-3} \qquad (\text{caso } R_{\mathrm{T}} = 6.375 \cdot 10^6 \text{ m}) \qquad 2.7$$

In pratica, quando occorre considerare il potenziale gravitazionale terrestre in una determinata zona relativamente ristretta della Terra, come ad esempio in balistica, il valore di R_{T} può essere identificato con quello del raggio medio terrestre nella regione considerata.

3. LA FORZA GRAVITAZIONALE AGENTE SU UN CORPO SOLIDO NELL'APPRESSIMAZIONE NEWTONIANA

E' facile convincersi che a qualsiasi quota e latitudine è sempre:

$$\tilde{U} << 1 \qquad 3.1$$

L'ordine di grandezza di $\tilde{U}$ è infatti mediamente di 10^{-4}. Quindi nella 2.2 se, come in balistica, l'azione del campo gravitazionale sul moto di un corpo avviene in un tempo relativamente breve, è senz'altro lecito trascurare il termine $\tilde{U}$. Diverso è invece il caso dei satelliti artificiali orbitanti a quota medio-bassa. In questo caso infatti il termine $\tilde{U}$, che a quote basse ha i valori maggiori, non può essere trascurato poiché il moto del satellite ripetendosi periodicamente per un tempo notevolmente lungo risente di un accumulo di perturbazioni che alla fine producono effetti evidenti (regressione della linea dei nodi e precessione della linea degli absidi). E' chiaro comunque che per poter trascurare $\tilde{U}$ occorre in ogni caso conoscerne correttamente l'ordine di grandezza in modo da avere un criterio che consenta di stabilire quando, rispetto ad eventuali altre forza che si vogliono considerare agenti sul corpo, questo termine si possa effettivamente omettere.

Trascurando nella 2.2 il termine $\tilde{U}$, si ottiene la cosiddetta *approssimazione newtoniana* del potenziale gravitazionale terrestre. In questa approssimazione, che dal punto di vista fisico equivale a considerare la Terra un corpo perfettamente sferico (di raggio R_{T}) ed omogeneo, il potenziale gravitazionale terrestre assume la forma:

$$U = \frac{G\,M_{\mathrm{T}}}{r} \qquad 3.2$$

e risulta quindi una funzione della sola r. In questa approssimazione, la forza $\mathbf{F}_{\mathrm{T}}$ che la Terra esercita su un punto materiale di massa m individuato rispetto al centro della Terra dal vettore posizione $\mathbf{r}$ (di modulo r), è perciò una forza che ha la direzione di questo vettore. Si ha infatti, per definizione:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{T}} = m\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \qquad 3.3$$

e come si potrebbe verificare con un calcolo diretto risulta:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{T}} = -G\,M_{\mathrm{T}}\,\frac{m}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad 3.4$$

dove con $\hat{\mathbf{r}}$ si è indicato il versore del vettore $\mathbf{r}$.

La 3.4 fornisce la forza di attrazione della Terra su un punto materiale di massa m nella cosiddetta approssimazione newtoniana. La forza $\mathbf{F}_{\mathrm{T}}$ che la Terra, nella medesima approssimazione, esercita su un corpo esteso si ottiene chiaramente integrando la 3.4 sull'intera massa del corpo. Dunque:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{T}} = -G\,M_{\mathrm{T}}\int_m \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\,dm \qquad 3.5$$

dove con m si è indicata la massa del corpo considerato. Per calcolare l'integrale a secondo membro della 3.5 osserviamo che il vettore $\mathbf{r}$, che individua la posizione del generico punto del corpo rispetto al centro della Terra, si può sempre esprimere nel modo seguente:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\mathrm{G}} + \tilde{\mathbf{r}} \qquad 3.6$$

dove $\mathbf{r}_{\mathrm{G}}$ è il vettore posizione rispetto al centro della Terra del centro di massa G del corpo ed $\tilde{\mathbf{r}}$ è il vettore posizione del generico punto del corpo rispetto a G. Poiché:

$$r^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} \qquad 3.7$$

avvalendosi della 3.6 si trova:

$$r^2 = r_{\mathrm{G}}^2\left[1 + 2\cos f\left(\frac{\tilde{r}}{r_{\mathrm{G}}}\right) + \left(\frac{\tilde{r}}{r_{\mathrm{G}}}\right)^2\right] \qquad 3.8$$

dove f è l'angolo compreso fra i vettori $\mathbf{r}_{\mathrm{G}}$ ed $\tilde{\mathbf{r}}$ (il cui modulo si è indicato rispettivamente con r_{G} ed $\tilde{r}$). D'altra parte, indicato con q l'angolo compreso fra i vettori $\mathbf{r}$ ed $\mathbf{r}_{\mathrm{G}}$, si ha:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_{\mathrm{G}} = r\, r_{\mathrm{G}} \cos q \qquad 3.9$$

ed avvalendosi della 3.6 risulta:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_{\mathrm{G}} = r_{\mathrm{G}}^2\left[1+\cos f\left(\frac{\tilde{r}}{r_{\mathrm{G}}}\right)\right] \qquad 3.10$$

In virtù della 3.8 possiamo quindi concludere che:

$$\cos q = \frac{1+\cos f\left(\dfrac{\tilde{r}}{r_{\mathrm{G}}}\right)}{\sqrt{1+2\cos f\left(\dfrac{\tilde{r}}{r_{\mathrm{G}}}\right)+\left(\dfrac{\tilde{r}}{r_{\mathrm{G}}}\right)^2}} \qquad 3.11$$

Poiché è evidente che:

$$\frac{\tilde{r}}{r_{\mathrm{G}}} << 1 \qquad 3.12$$

(per un corpo normale in prossimità della superficie terrestre l'ordine di grandezza di questo rapporto è 10^{-7}), dalla 3.8 e dalla 3.11 si ottiene:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_{\mathrm{G}}^2}\left[1-2\cos f\left(\frac{\tilde{r}}{r_{\mathrm{G}}}\right)-(1-4\cos^2 f)\left(\frac{\tilde{r}}{r_{\mathrm{G}}}\right)^2+\cdots\right] \qquad 3.13$$

$$\cos q = 1-\frac{1}{2}\sin^2 f\left(\frac{\tilde{r}}{r_{\mathrm{G}}}\right)^2+\cdots \qquad 3.14$$

Possiamo quindi concludere, in virtù della 3.14, che il sistema di forze gravitazionali applicato al corpo è praticamente un sistema di forze parallele la cui direzione è quella del vettore $\mathbf{r}_{\mathrm{G}}$, e che quindi la sua risultante, cioè la forza $\mathbf{F}_{\mathrm{T}}$ definita dalla 3.5, è applicata al baricentro del corpo. Essa ha la direzione di $\mathbf{r}_{\mathrm{G}}$ e la sua intensità risulta:

$$\left|\mathbf{F}_{\mathrm{T}}\right| = G\, M_{\mathrm{T}} \int_m \frac{dm}{r^2} \qquad 3.15$$

Per la 3.13, nella medesima approssimazione per la quale $\mathbf{F}_{\mathrm{T}}$ si può considerare applicata al baricentro del corpo ed avente la direzione del vettore $\mathbf{r}_{\mathrm{G}}$, risulta quindi:

$$\left|\mathbf{F}_{\mathrm{T}}\right| = G\, M_{\mathrm{T}} \frac{m}{r_{\mathrm{G}}^{2}} \tag{3.16}$$

Abbiamo così trovato che nell'approssimazione newtoniana la forza gravitazionale agente su un corpo esteso è in pratica applicata al baricentro del corpo e, a meno di termini praticamente nulli, data dalla seguente relazione:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{T}} = -G\, M_{\mathrm{T}} \frac{m}{r_{\mathrm{G}}^{2}} \hat{\mathbf{r}}_{\mathrm{G}} \tag{3.17}$$

dove m è la massa del corpo ed r_{G} è la distanza del suo baricentro dal centro della Terra.

Si noti che la 3.17, sebbene sia stata ottenuta con un'ipotesi che presuppone la Terra perfettamente sferica ed omogenea, è senz'altro applicabile a tutti i casi concreti, come si evince dall'ordine di grandezza dei termini trascurati.

4. LA FORZA GRAVITAZIONALE AGENTE SU UN PROIETTILE NELL'APPROSSIMAZIONE NEWTONIANA

La forza gravitazionale che nell'approssimazione newtoniana agisce su un proiettile è chiaramente fornita dalla 3.17. Per utilizzare concretamente questa relazione è tuttavia necessario trovarne le proiezioni lungo gli assi del sistema di riferimento adattato. Come si è detto, per descrivere il moto del centro di massa di un proiettile si utilizza una terna ortogonale solidale ad un punto della superficie terrestre ed avente orientazione fissa rispetto alla Terra. Indichiamo con $\{\mathrm{P}, x, y, z\}$ questa terna ortogonale ed assumiamo che l'asse z coincida con la normale esterna alla superficie terrestre in P, identificata almeno localmente, con una sfera di raggio R_{T}, come schematizzato in Figura 2.2.

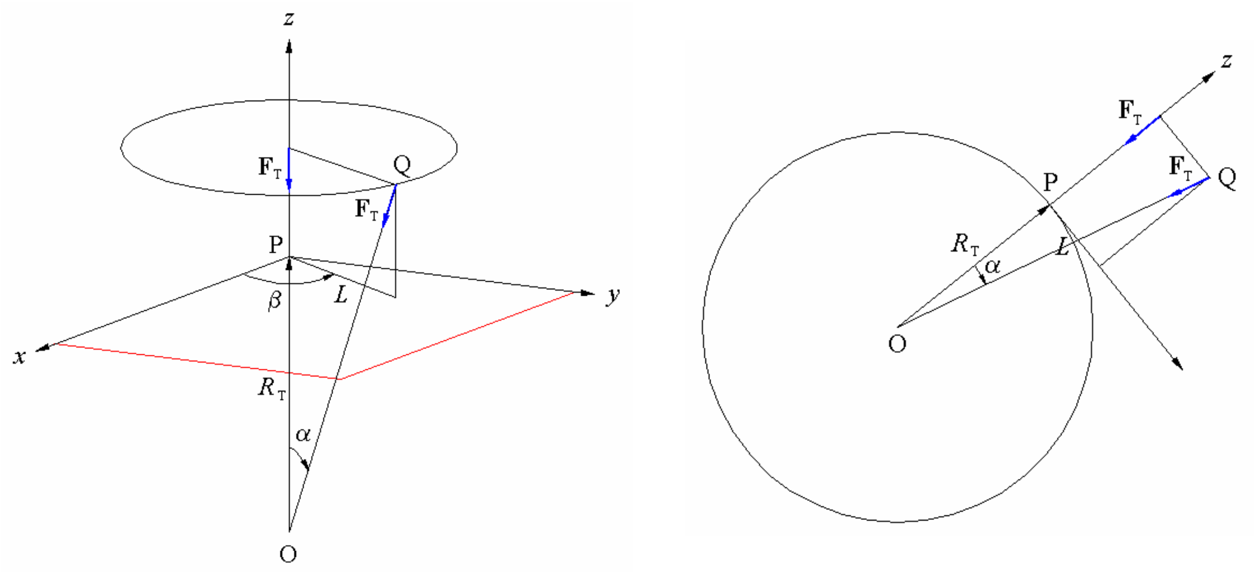

Figura 2.2

Supponiamo che il punto P abbia coordinate geografiche F_{P}, L_{P}. Supponiamo quindi, come mostrato in Figura 2.2, che il proiettile, di massa m, si trovi nel punto Q dello spazio individuato rispetto alla terna $\{P, x, y, z\}$ dalla tripletta (x, y, z), o in alternativa, dalla tripletta (b, L, z). Per ragioni di simmetria, non ha rilevanza la posizione di P sulla superficie terrestre ed r dipende unicamente da L e z. Dalla Figura 2.2 si vede che:

$$r\cos a = R_T + z \tag{4.1}$$

$$r\sin a = L \tag{4.2}$$

Dunque risulta:

$$a = \arctan\left(\frac{L}{R_T + z}\right) \tag{4.3}$$

e di conseguenza si ha:

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{R_T+z}\right)^2}} \quad ; \quad \sin a = \frac{L}{(R_T+z)\sqrt{1+\left(\frac{L}{R_T+z}\right)^2}} \tag{4.4}$$

Avvalendoci della 4.2, possiamo dunque concludere che:

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(R_T+z)^2}\,\frac{1}{1+\left(\frac{L}{R_T+z}\right)^2} \tag{4.5}$$

Siano $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ i versori fondamentali della terna $\{P, x, y, z\}$ ed indichiamo con $\hat{\mathbf{e}}_L$ il versore della direzione $Q'-P$, dove Q' è la proiezione di Q sul piano x-y. E’ chiaro che:

$$\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{e}}_L = r\sin a \tag{4.6}$$

$$\mathbf{r}\cdot\hat{\mathbf{k}} = r\cos a \tag{4.7}$$

Dalle 4.6 e 4.7, tenendo presente che:

$$\hat{\mathbf{e}}_L = \cos b\,\hat{\mathbf{i}} + \sin b\,\hat{\mathbf{j}} \tag{4.8}$$

si trae allora:

$$\hat{\mathbf{r}} = \sin a\cos b\,\hat{\mathbf{i}} + \sin a\sin b\,\hat{\mathbf{j}} + \cos a\,\hat{\mathbf{k}} \tag{4.9}$$

Poiché in balistica si suppone sempre $L < R_T + z$, possiamo scrivere:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{R_T+z}\right)^2}} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{L}{R_T+z}\right)^2 + \frac{3}{8}\left(\frac{L}{R_T+z}\right)^4 + \cdots \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{1+\left(\dfrac{L}{R_\mathrm{T}+z}\right)^2} = 1-\left(\frac{L}{R_\mathrm{T}+z}\right)^2+\left(\frac{L}{R_\mathrm{T}+z}\right)^4+\cdots \qquad 4.11$$

Così, ponendo:

$$g_0 = \frac{G M_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}^2} \qquad 4.12$$

dalla 3.17, avvalendosi delle 4.5, 4.10, 4.11 e 4.12, si ottiene il seguente sviluppo in serie per la forza $\mathbf{F}_\mathrm{T}$:

$$\mathbf{F}_\mathrm{T} = -m g_0 \left(\frac{R_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}+z}\right)^2 \left[\left(\frac{L}{R_\mathrm{T}+z}-\frac{3}{2}\frac{L^3}{(R_\mathrm{T}+z)^3}+\cdots\right)\cos b\,\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{L}{R_\mathrm{T}+z}-\frac{3}{2}\frac{L^3}{(R_\mathrm{T}+z)^3}+\cdots\right)\sin\,b\,\hat{\mathbf{j}} + \right.$$

$$\left. + \left(1-\frac{3}{2}\frac{L^2}{(R_\mathrm{T}+z)^2}+\cdots\right)\hat{\mathbf{k}}\right] \qquad 4.13$$

Questa è la relazione cercata, che consente di esprimere la forza $\mathbf{F}_\mathrm{T}$ definita dalla 3.17 rispetto alla terna $\{\mathrm{P}, x, y, z\}$ da noi considerata. Si noti a questo proposito che nella 4.13:

$$L = \sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad \cos b = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad ; \quad \sin\, b = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad 4.14$$

Concludiamo l'argomento con una osservazione sul valore di g_0. Tale valore, come si evince dalla 4.12, dipende dal valore di R_T utilizzato. Se R_T si identifica con il raggio medio terrestre, cioè si assume $R_\mathrm{T} = 6.371\cdot 10^6$ m, allora risulta $g_0 = 9.8192$ m/s^2. Se invece, come più spesso avviene, R_T si identifica con il raggio medio terrestre alla latitudine di 45°, cioè si assume $R_\mathrm{T} = 6.375\cdot 10^6$ m, allora risulta $g_0 = 9.80665$ m/s^2. Questo è il valore di g_0 al quale solitamente si fa riferimento in balistica, anche se per essere più precisi si potrebbe utilizzare per g_0 il valore fornito dalla 4.12 quando R_T è identificato con il raggio medio terrestre della regione in cui si considera il moto del proiettile.

5. FORMULE DI PRIMA E SECONDA APPROSSIMAZIONE

Chiaramente, qualora sia $L \ll R_\mathrm{T}+z$ la formula 4.13 può essere notevolmente semplificata. Infatti, se:

$$\frac{L}{R_\mathrm{T}+z} \ll 1 \qquad 5.1$$

allora in prima approssimazione la 4.13 si può scrivere nella forma seguente:

$$\mathbf{F}_\mathrm{T} = -m\,g_0\left(\frac{R_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}+z}\right)^2\hat{\mathbf{k}} \qquad 5.2$$

che è l'espressione di $\mathbf{F}_\mathrm{T}$ solitamente utilizzata in balistica. Si noti che dal punto di vista fisico utilizzare la 5.2 significa non solo considerare la Terra perfettamente sferica ed omogenea, ma anche trascurarne la curvatura. Nella approssimazione della 5.2, la direzione di $\mathbf{F}_\mathrm{T}$ è infatti costante. La 5.2 è quindi correttamente applicabile solo per gittate relativamente piccole.

Vediamo ora di trovare un'approssimazione migliore per la forza $\mathbf{F}_\mathrm{T}$ valida anche per gittate medio-lunghe. Un semplice calcolo mostra che nella 4.13 il primo termine correttivo nella componente verticale di $\mathbf{F}_\mathrm{T}$ può praticamente sempre essere omesso. Supponendo ad esempio $L = 100$ Km (che è una gittata notevole), si ha infatti:

$$\frac{3}{2}\frac{L^2}{(R_\mathrm{T}+z)^2} < 3.691\cdot 10^{-4} \qquad (R_\mathrm{T} = 6.375\cdot 10^6 \text{ m}) \qquad 5.3$$

Dunque l'errore percentuale che si commette omettendo il termine considerato è praticamente sempre trascurabile. Più critico è invece omettere le componenti orizzontali di $\mathbf{F}_\mathrm{T}$. Si ha infatti, considerando sempre L = 100 Km:

$$\frac{L}{R_\mathrm{T}+z} < 1.5686\cdot 10^{-2} \qquad (R_\mathrm{T} = 6.375\cdot 10^6 \text{ m}) \qquad 5.4$$

Dunque se si suppone che L possa arrivare a valori elevati, non si può in generale prescindere dal considerare l'effetto delle componenti orizzontali della forza $\mathbf{F}_\mathrm{T}$, a meno di commettere degli errori che possono risultare di un certo rilievo. In questi casi una formula più corretta della 5.2 è allora la seguente, ottenuta dalla 4.13 avvalendosi anche delle 4.14:

$$\mathbf{F}_\mathrm{T} = -m\,g_0\left(\frac{R_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}+z}\right)^2\left[\frac{x}{R_\mathrm{T}+z}\hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{R_\mathrm{T}+z}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right] \qquad 5.5$$

Si noti che adottando questa espressione della forza $\mathbf{F}_\mathrm{T}$ si tiene conto della curvatura terrestre in quanto la direzione di $\mathbf{F}_\mathrm{T}$ non è costantemente perpendicolare al piano x-y.

Ponendo:

$$g = g_0\left(\frac{R_\mathrm{T}}{R_\mathrm{T}+z}\right)^2 \qquad 5.6$$

la 5.2 e la più precisa 5.5 assumono rispettivamente la forma seguente:

$$\mathbf{F}_\mathrm{T} = -m\,g\,\hat{\mathbf{k}} \qquad 5.7$$

$$\mathbf{F}_\mathrm{T} = -m\,g\left[\frac{x}{R_\mathrm{T}+z}\hat{\mathbf{i}} + \frac{y}{R_\mathrm{T}+z}\hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}\right] \qquad 5.8$$

La grandezza g ora introdotta prende il nome di *accelerazione di gravità* e come si vede dalla 5.6, dipende dalla quota (otre che dal valore assunto per R_T). Chiaramente, se le quote raggiunte dal proiettile non sono elevate, allora il termine al quadrato nella 5.6 può essere considerato unitario ed in questo caso g, e quindi $\mathbf{F}_T$ nel caso della 5.7 o la componente verticale di $\mathbf{F}_T$ nel caso della 5.8, risultano di intensità costante. Non sempre però in balistica questa semplificazione può essere usata. Essa vale infatti solo se le quote raggiunte dal proiettile sono sempre relativamente basse e quindi per traiettorie a piccola arcata (indipendentemente dalla gittata).

Concludiamo osservando che l'utilizzo della 5.7 è di norma lecito, soprattutto se si utilizza un modello balistico semplificato come ad esempio quello euleriano. Occorre però tenere presente che nel caso di gittate elevate essa introduce un errore (in intensità e direzione) il cui ordine di grandezza deve essere stimato in modo da stabilire quando, rispetto ad eventuali altre forza che si vogliono considerare agenti sul proiettile (chiaramente di ordine di grandezza superiore all'errore che si commette utilizzando per il potenziale gravitazionale l'approssimazione newtoniana), l'utilizzo della 5.7 sia effettivamente accettabile.

BIBLIOGRAFIA GENERALE

[1] T. Levi-Civita, U. Amaldi, “Lezioni di Meccanica Razionale”, Vol. 1, Vol. 2 Parte I, Vol. 2 Parte II, Zanichelli.

[2] R. L. McCoy, “Modern Exterior Ballistics”, Schiffer Publishing Ltd.

[3] M. G. Busato, “Le Equazioni Generali della Balistica Esterna per i Proiettili a Massa Costante”, mgbstudio.net.

[4] M. G. Busato, “Le Azioni Aerodinamiche Caratterizzanti il Moto dei Proiettili Senza Alettature”, mgbstudio.net.

[5] D. Borghi – M. G. Busato, “Dinamica del Volo Spaziale”, Levrotto & Bella.

INDICE GENERALE