

**M. G. BUSATO**

**ROTAZIONI DEGLI ESTREMI DI UNA TRAVE  
PRISMATICA APPOGGIATA ALLE ESTREMITÁ  
E SOGGETTA AD UN CARICO VERTICALE**

**CASO DEI CARICHI TRIANGOLARE,  
UNIFORME E CONCENTRATO**

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

## SOMMARIO

*In questo scritto vengono studiate le rotazioni degli estremi di una trave prismatica appoggiata alle estremità e soggetta ad un carico verticale. Precisamente, dopo un inquadramento generale del problema realizzato mediante il principio dei lavori virtuali, vengono analizzate le seguenti tre tipologie di carico verticale di interesse pratico: (a) carico triangolare agente su una porzione arbitraria della trave, (b) carico uniforme agente su una porzione arbitraria della trave, (c) carico concentrato agente in un punto arbitrario della trave. Lo scritto è concluso con una appendice nella quale è illustrato il legame che intercorre fra le rotazioni degli estremi di una trave appoggiata alle estremità ed i momenti di incastro perfetto che si manifestano quando la trave, soggetta al medesimo carico verticale, invece di essere appoggiata è perfettamente incastrata alle estremità stesse.*

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

## **INDICE GENERALE**

<b>1. GENERALITÀ</b>	<b>1</b>
<b>2. TRAVE SOGGETTA A CARICO TRIANGOLARE</b>	<b>3</b>
<b>3. TRAVE SOGGETTA A CARICO UNIFORME</b>	<b>5</b>
<b>4. TRAVE SOGGETTA AD UN CARICO CONCENTRATO</b>	<b>7</b>
<b>5. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE</b>	<b>8</b>
<b>Appendice 1 Trave prismatica perfettamente incastrata alle estremità: legame fra i momenti di incastro perfetto e le rotazioni delle estremità della trave supposta appoggiata agli estremi e soggetta al medesimo carico.</b>	<b>9</b>
<b>BIBLIOGRAFIA GENERALE</b>	<b>13</b>

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

# 1. GENERALITÀ

Consideriamo una trave prismatica appoggiata alle estremità e soggetta ad un generico carico verticale come mostrato in Figura 1.1. Ci proponiamo di determinare le rotazioni  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  delle due estremità della trave. Ricordiamo che per convenzione le rotazioni delle sezioni di una trave si assumono positive se di senso orario e negative se di senso antiorario, come è evidenziato nella stessa Figura 1.1.

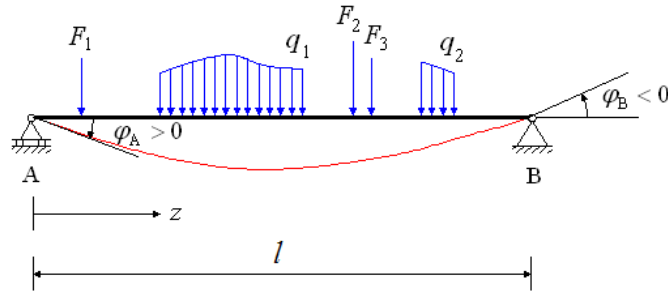


Figura 1.1

La via più semplice e diretta per determinare  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  è applicare il principio dei lavori virtuali. Così facendo si ha infatti:

$$\varphi_A = \int_0^l \frac{M M'_{(A)}}{EJ} dz \quad ; \quad \varphi_B = - \int_0^l \frac{M M'_{(B)}}{EJ} dz \tag{1.1}$$

dove  $M$  è il momento flettente nella trave dovuto al carico su di essa agente, mentre  $M'_{(A)}$  ed  $M'_{(B)}$  sono rispettivamente il momento flettente nella trave dovuto ad una coppia destrogira unitaria applicata in A ed il momento flettente nella trave dovuto ad una coppia sinistrogira unitaria applicata in B. Poiché sia  $M$  che  $M'_{(A)}$  ed  $M'_{(B)}$  sono funzioni positive di  $z$  ( $M$  per il tipo di carico considerato ed  $M'_{(A)}$  ed  $M'_{(B)}$  per il verso fissato alle coppie), il segno “meno” che compare davanti al secondo integrale nella 1.1 fa sì che risulti, come deve essere,  $\varphi_B < 0$ .

Il Momento flettente  $M$  sarà in generale rappresentabile mediante una funzione di  $z$  a più determinazioni nell'intervallo  $[0, l]$ ; sarà cioè in generale una funzione di  $z$  della forma seguente (nel caso rappresentato in Figura 1.1 è  $n = 8$ ):

$$M = \begin{cases} M_1(z) & \text{se } z \in [0, z_1[ \\ M_2(z) & \text{se } z \in [z_1, z_2[ \\ \vdots & \vdots \\ M_n(z) & \text{se } z \in [z_{n-1}, l[ \end{cases} \tag{1.2}$$

Si ha invece manifestamente:

$$M'_{(A)} = 1 - \frac{z}{l} \tag{1.3}$$

$$M'_{(B)} = \frac{z}{l}$$

1.4

I Diagrammi dei momenti flettenti  $M$  (per la situazione di carico rappresentata in Figura 1.1),  $M'_{(A)}$  ed  $M'_{(B)}$  sono riportati nella seguente Figura 1.2.

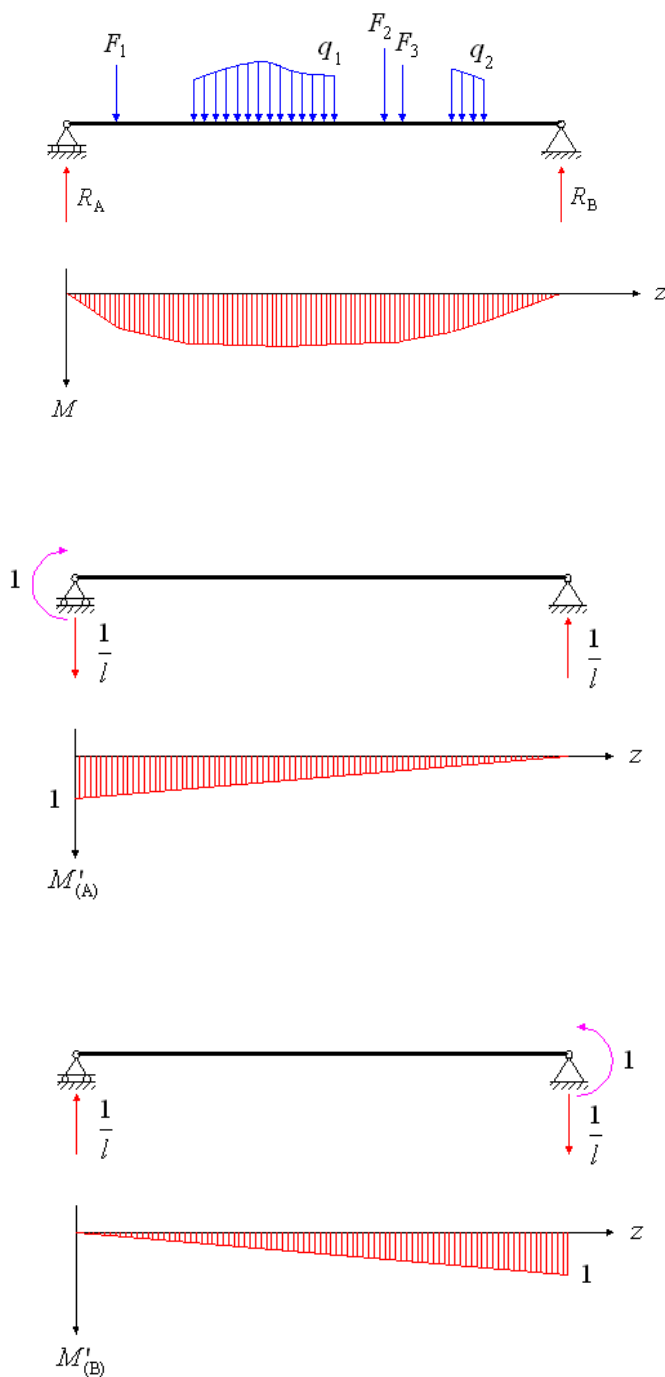


Figura 1.2

Esprimendo  $M$  per mezzo della 1.2, dalle 1.1 si ottiene:



$$\varphi_A = \frac{1}{EJ} \left[ \int_0^{z_1} M_1 M'_{(A)} dz + \int_{z_1}^{z_2} M_2 M'_{(A)} dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^l M_n M'_{(A)} dz \right] \quad 1.5$$

$$\varphi_B = -\frac{1}{EJ} \left[ \int_0^{z_1} M_1 M'_{(B)} dz + \int_{z_1}^{z_2} M_2 M'_{(B)} dz + \dots + \int_{z_{n-1}}^l M_n M'_{(B)} dz \right] \quad 1.6$$

Per trovare le rotazioni  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  è sufficiente quindi determinare le funzioni  $M_1, M_2, \dots, M_n$  e calcolare gli integrali che compaiono a secondo membro delle 1.5 ed 1.6 in cui  $M'_{(A)}$  ed  $M'_{(B)}$  sono funzioni note, dati rispettivamente dalla 1.3 ed 1.4. Nei paragrafi seguenti studieremo in dettaglio tre tipologie di condizioni di carico le cui combinazioni consentono di trattare un gran numero problemi di interesse pratico.

## 2. TRAVE SOGGETTA A CARICO TRIANGOLARE

Consideriamo la situazione schematizzata in Figura 2.1 qui di seguito riportata. La trave si suppone soggetta ad un carico triangolare di valore massimo  $q_0$  agente s'un tratto di lunghezza  $l_0$  della campata.

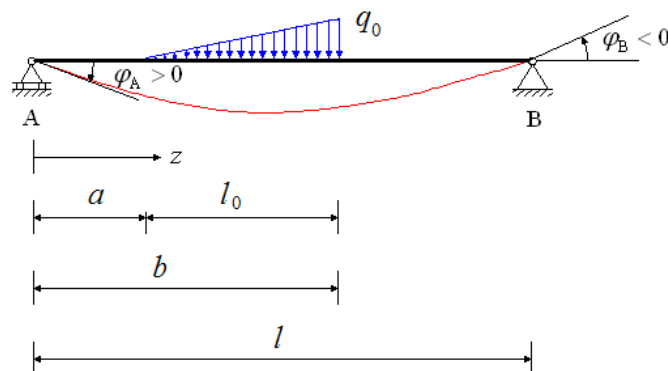


Figura 2.1

In questo caso si ha (v. Figura 2.2):

$$M = \begin{cases} R_A z & \text{se } z \in [0, a] \\ R_A z - q_0 \frac{(z-a)^3}{6(b-a)} & \text{se } z \in [a, b] \\ R_A z - q_0 \frac{b-a}{2} \left( z - \frac{a+2b}{3} \right) & \text{se } z \in [b, l] \end{cases} \quad 2.1$$

dove  $R_A$  è la reazione dell'appoggio in A, fornita dalla seguente espressione:

$$R_A = q_0 \frac{b-a}{2l} \left( l - \frac{a+2b}{3} \right) \quad 2.2$$

La 2.2 si ottiene scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione della trave attorno a B.

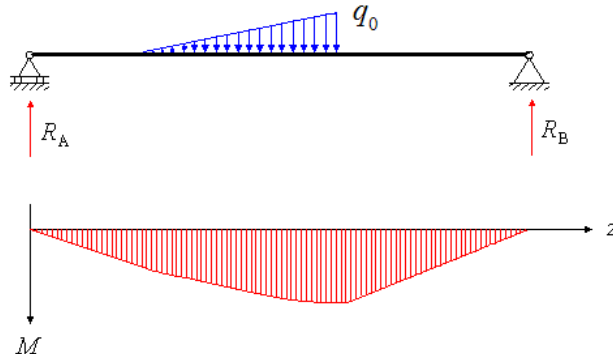


Figura 2.2

Dal calcolo degli integrali 1.5 ed 1.6 le cercate rotazioni  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  risultano allora date dalle formule qui di seguito riportate:

$$\varphi_A = \frac{q_0}{360 E J} \frac{(b-a)[3a^3 + 3a^2(2b-5l) + a(9b^2 - 30bl + 20l^2) + b(12b^2 - 45bl + 40l^2)]}{l} \quad 2.3$$

$$\varphi_B = -\frac{q_0}{360 E J} \frac{(b-a)[(a+2b)(10l^2 - 3a^2 - 6b^2) - 3ab^2]}{l} \quad 2.4$$

Nella seguente Tabella 2.1 sono indicate le espressioni delle rotazioni  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  in tre casi significativi per le applicazioni pratiche.

schema statico	$a$	$b$	$\varphi_A$	$\varphi_B$
	$a=0$	$b=l$	$\varphi_A = \frac{7q_0 l^3}{360 E J}$	$\varphi_B = -\frac{8q_0 l^3}{360 E J}$
	$a=0$	$b = \frac{1}{2}l$	$\varphi_A = \frac{41q_0 l^3}{2880 E J}$	$\varphi_B = -\frac{34q_0 l^3}{2880 E J}$
	$a = \frac{1}{2}l$	$b=l$	$\varphi_A = \frac{37q_0 l^3}{5760 E J}$	$\varphi_B = -\frac{53q_0 l^3}{5760 E J}$

Tabella 2.1

A partire dai casi elencati in Tabella 2.1 si possono poi costruire, avvalendosi del principio di sovrapposizione degli effetti, diversi altri casi di interesse pratico.

### 3. TRAVE SOGGETTA A CARICO UNIFORME

Consideriamo la situazione schematizzata in Figura 3.1 qui di seguito riportata. La trave si suppone soggetta ad un carico uniforme di valore  $q$  agente s' un tratto di lunghezza  $l_0$  della campata.

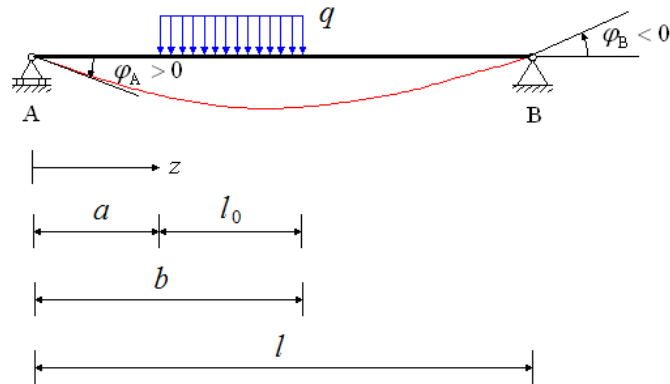


Figura 3.1

In questo caso si ha (v. Figura 3.2):

$$M = \begin{cases} R_A z & \text{se } z \in [0, a] \\ R_A z - \frac{1}{2} q (z - a)^2 & \text{se } z \in [a, b] \\ R_A z - q(b - a) \left( z - \frac{a + b}{2} \right) & \text{se } z \in [b, l] \end{cases} \quad 3.1$$

dove  $R_A$  è la reazione dell'appoggio in A, fornita dalla seguente espressione:

$$R_A = q \frac{b - a}{l} \left( l - \frac{a + b}{2} \right) \quad 3.2$$

La 3.2 si ottiene scrivendo l'equazione di equilibrio alla rotazione della trave attorno a B.

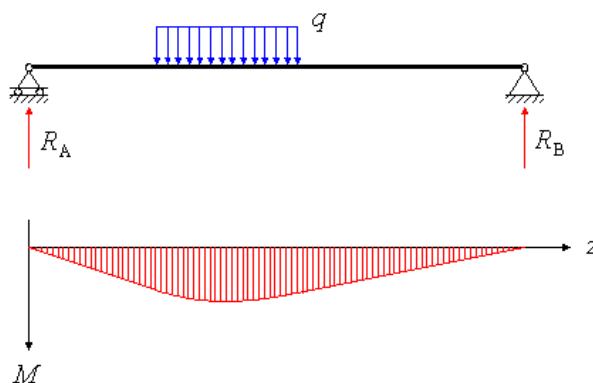


Figura 3.2

Dal calcolo degli integrali 1.5 ed 1.6 le cercate rotazioni  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  risultano allora date dalle formule qui di seguito riportate:

$$\varphi_A = \frac{q}{24 EJ} \frac{(b-a)[2l-(a+b)][2l(a+b)-(a^2+b^2)]}{l} \quad 3.3$$

$$\varphi_B = -\frac{q}{24 EJ} \frac{(a^2-b^2)(a^2+b^2-2l^2)}{l} \quad 3.4$$

Nella seguente Tabella 3.1 sono indicate le espressioni delle rotazioni  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  in tre casi significativi per le applicazioni pratiche.




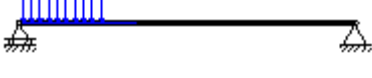

schema statico	$a$	$b$	$\varphi_A$	$\varphi_B$
	$a=0$	$b=l$	$\varphi_A = \frac{ql^3}{24 EJ}$	$\varphi_B = -\frac{ql^3}{24 EJ}$
	$a=0$	$b = \frac{2}{3}l$	$\varphi_A = \frac{8ql^3}{243 EJ}$	$\varphi_B = -\frac{7ql^3}{243 EJ}$
	$a=0$	$b = \frac{1}{2}l$	$\varphi_A = \frac{9ql^3}{384 EJ}$	$\varphi_B = -\frac{7ql^3}{384 EJ}$
	$a=0$	$b = \frac{1}{3}l$	$\varphi_A = \frac{25ql^3}{1944 EJ}$	$\varphi_B = -\frac{17ql^3}{1944 EJ}$
	$a = \frac{1}{4}l$	$b = \frac{3}{4}l$	$\varphi_A = \frac{11ql^3}{384 EJ}$	$\varphi_B = -\frac{11ql^3}{384 EJ}$

Tabella 3.1

A partire dai casi elencati in Tabella 3.1 si possono poi costruire, avvalendosi del principio di sovrapposizione degli effetti, diversi altri casi di interesse pratico.

Osservazione. Le 3.3 e 3.4 si possono ricavare anche attraverso le 2.3 e 2.4. Il tipo di carico considerato in questo paragrafo si può infatti immaginare ottenuto come sovrapposizione di due carichi triangolari come è mostrato in Figura 3.3.

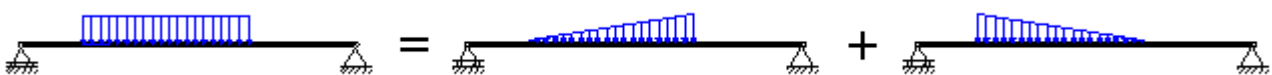


Figura 3.3

A titolo d'esempio consideriamo il caso di un carico uniforme di valore  $q$  agente sull'intera campata (v. Tabella 3.1, prima riga). In base a quanto illustrato in Figura 3.3 si può allora scrivere (v. Tabel-

la 2.1, prima riga):

$$\varphi_A = \frac{7ql^3}{360EJ} + \frac{8ql^3}{360EJ} = \frac{15ql^3}{360EJ} = \frac{ql^3}{24EJ} \quad 3.5$$

$$\varphi_B = -\frac{8ql^3}{360EJ} - \frac{7ql^3}{360EJ} = -\frac{15ql^3}{360EJ} = -\frac{ql^3}{24EJ} \quad 3.6$$

Questo modo di procedere è però scomodo e si è preferito usare l'approccio diretto basato sulle relazioni 1.5 ed 1.6.

#### 4. TRAVE SOGGETTA AD UN CARICO CONCENTRATO

Consideriamo la situazione schematizzata in Figura 4.1 qui di seguito riportata. La trave si suppone soggetta ad un carico concentrato di valore  $P$  agente a distanza  $a$  dall'appoggio in A.

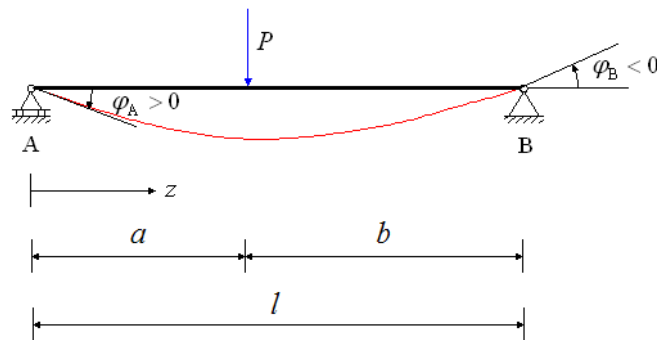


Figura 4.1

In questo caso si ha (v. Figura 4.2):

$$M = \begin{cases} R_A z & \text{se } z \in [0, a] \\ R_A z - P(z-a) & \text{se } z \in [a, l] \end{cases} \quad 4.1$$

dove  $R_A$  è la reazione dell'appoggio in A, fornita manifestamente dalla seguente espressione:

$$R_A = P \frac{b}{l} \quad 4.2$$

Dal calcolo degli integrali 1.5 ed 1.6 le cercate rotazioni  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  risultano allora date dalle formule qui di seguito riportate:

$$\varphi_A = \frac{P}{6EJ} \frac{b(l^2 - b^2)}{l} \quad 4.3$$

$$\varphi_B = -\frac{P}{6EJ} \frac{a(l^2 - a^2)}{l} \quad 4.4$$

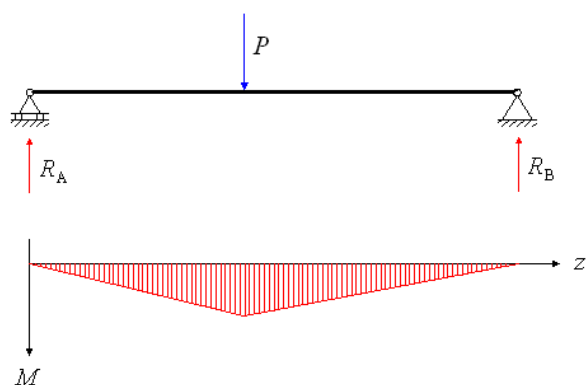


Figura 4.2

Nella seguente Tabella 4.1 sono indicate le espressioni delle rotazioni  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  in tre casi significativi per le applicazioni pratiche.


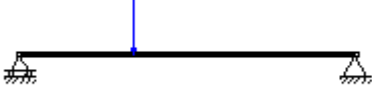
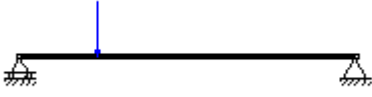
schema statico	$a$	$b$	$\varphi_A$	$\varphi_B$
	$a = \frac{1}{2}l$	$b = \frac{1}{2}l$	$\varphi_A = \frac{Pl^2}{16EJ}$	$\varphi_B = -\frac{Pl^2}{16EJ}$
	$a = \frac{1}{3}l$	$b = \frac{2}{3}l$	$\varphi_A = \frac{5Pl^2}{81EJ}$	$\varphi_B = -\frac{4Pl^2}{81EJ}$
	$a = \frac{1}{4}l$	$b = \frac{3}{4}l$	$\varphi_A = \frac{7Pl^2}{128EJ}$	$\varphi_B = -\frac{5Pl^2}{128EJ}$

Tabella 4.1

A partire dai casi riportati in Tabella 4.1 si possono poi costruire, avvalendosi del principio di sovrapposizione degli effetti, diversi altri casi di interesse pratico.

Osservazione. Le 4.3 e 4.4 si possono ricavare anche attraverso le 3.3 e 3.4. Il tipo di carico considerato in questo paragrafo si può infatti immaginare ottenuto come limite per  $b \rightarrow a^+$  di un carico uniforme di risultante pari a  $P$  (cioè caratterizzato dal valore  $q = P/(b-a)$ ) che agisce sulla trave fra i punti di ascissa  $a$  e  $b$  ( $b$  arbitrario). Anche in questo caso è però preferibile usare l'approccio diretto basato sulle relazioni 1.5 ed 1.6.

## 5. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Concludiamo questo scritto osservando che a partire dai casi riportati in Tabella 2.1, Tabella 3.1 e Tabella 4.1 si possono ottenere, avvalendosi del principio di sovrapposizione degli effetti, numerosi casi di interesse pratico. Ad esempio è possibile studiare il caso di un carico trapezoidale che è manifestamente ottenibile come sovrapposizione di un carico uniforme con uno triangolare.

APPENDICE 1 Trave prismatica perfettamente incastrata alle estremità: legame fra i momenti di incastro perfetto e le rotazioni delle estremità della trave supposta appoggiata agli estremi e soggetta al medesimo carico.

Consideriamo una trave prismatica perfettamente incastrata alle estremità e soggetta ad un generico carico verticale come mostrato in Figura A1.1.

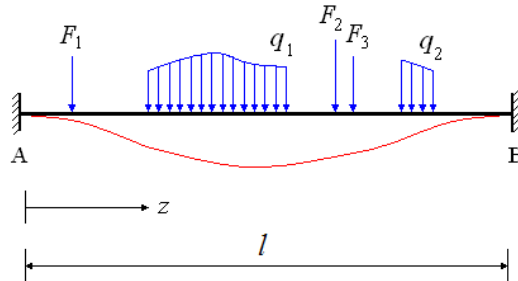


Figura A1.1

Per il tipo di carico considerato la trave è due volte iperstatica e può essere resa isostatica mettendo in evidenza i momenti d'incastro perfetto che, conformemente all'azione del carico considerato, assumeremo orientati come in Figura A1.2 e quindi di valore negativo (come è stato evidenziato nella stessa Figura A1.2).

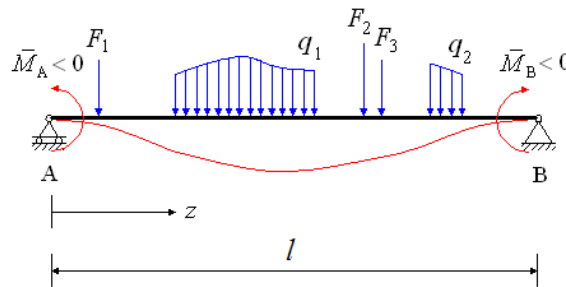


Figura A1.2

Come è noto, i valori di  $\bar{M}_A$  ed  $\bar{M}_B$  possono determinarsi attraverso le equazioni di congruenza associate allo schema statico ausiliario rappresentato in Figura A1.2. Tali equazioni, indicate con  $\bar{\varphi}_A$  e  $\bar{\varphi}_B$  le rotazioni delle estremità della trave doppiamente incastrata (schema statico di Figura A1.1), sono chiaramente le seguenti (avendo supposto che gli incastrati siano perfetti):

$$\bar{\varphi}_A = 0 \tag{A1.1}$$

$$\bar{\varphi}_B = 0 \tag{A1.2}$$

In base al principio di sovrapposizione degli effetti si ha (v. Figura A1.3):

$$\bar{\varphi}_A = \varphi_A + \varphi_{AA} + \varphi_{AB} \tag{A1.3}$$

$$\bar{\varphi}_B = \varphi_B + \varphi_{BA} + \varphi_{BB} \tag{A1.4}$$

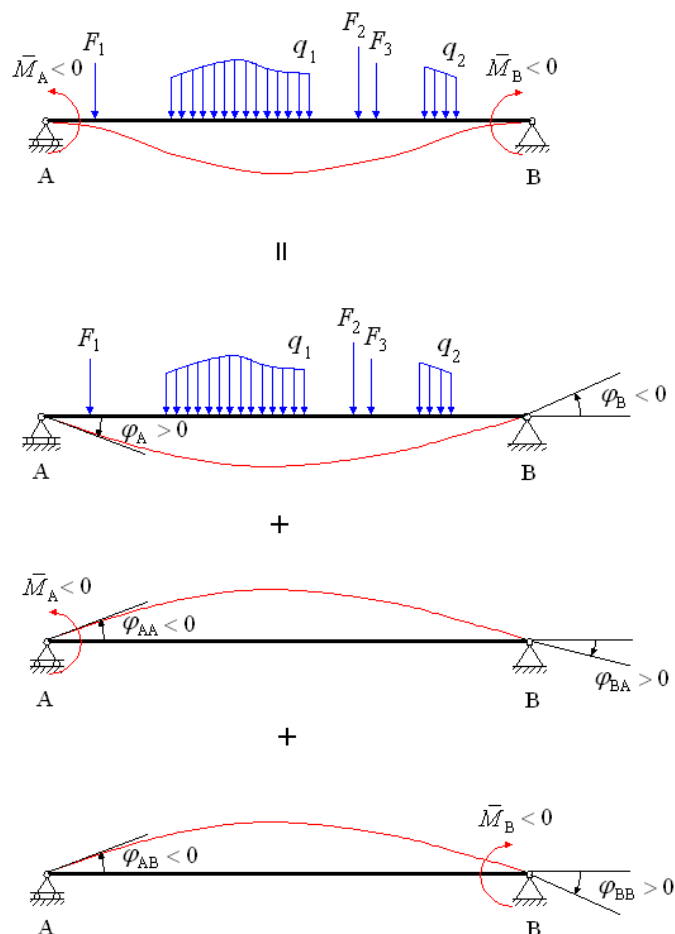


Figura A1.3

Ora nelle A1.3 ed A1.4,  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  sono le rotazioni delle estremità della trave dovute al solo carico agente su di essa quando la trave è supposta appoggiata alle estremità, mentre come è noto si ha:

$$\varphi_{AA} = \frac{\bar{M}_A l}{3EJ} \quad ; \quad \varphi_{BA} = -\frac{\bar{M}_A l}{6EJ} \quad \text{A1.5}$$

$$\varphi_{AB} = \frac{\bar{M}_B l}{6EJ} \quad ; \quad \varphi_{BB} = -\frac{\bar{M}_B l}{3EJ} \quad \text{A1.6}$$

Nello scrivere le A1.5 ed A1.6 si è tenuto presente che  $\bar{M}_A, \bar{M}_B < 0$  e che deve essere  $\varphi_{AA}, \varphi_{AB} < 0$ ,  $\varphi_{BB}, \varphi_{BA} > 0$ .

Avvalendosi delle A1.5 ed A1.6 le A1.3 ed A1.4 assumono la forma seguente:

$$\bar{\varphi}_A = \varphi_A + \frac{\bar{M}_A l}{3EJ} + \frac{\bar{M}_B l}{6EJ} \quad \text{A1.7}$$

$$\bar{\varphi}_B = \varphi_B - \frac{\bar{M}_A l}{6EJ} - \frac{\bar{M}_B l}{3EJ} \quad \text{A1.8}$$



Possiamo così concludere, in forza delle A1.1 ed A1.2, che le rotazioni  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  dovute al solo carico agente sulla trave supposta appoggiata alle estremità, sono legate ai valori dei momenti di incastro perfetto  $\bar{M}_A$  ed  $\bar{M}_B$  relativi al medesimo carico, dalle seguenti relazioni:

$$\varphi_A = -\frac{\bar{M}_A l}{3EJ} - \frac{\bar{M}_B l}{6EJ} \quad \text{A1.9}$$

$$\varphi_B = \frac{\bar{M}_A l}{6EJ} + \frac{\bar{M}_B l}{3EJ} \quad \text{A1.10}$$

Si noti che essendo  $\bar{M}_A, \bar{M}_B < 0$ , le relazioni sopra riportate forniscono, come deve essere per il tipo di carico considerato,  $\varphi_A > 0$  e  $\varphi_B < 0$ .

Le formule A1.9 ed A1.10 esprimono il legame fra le rotazioni delle estremità di una trave appoggiata agli estremi dovute al carico che agisce sulla trave ed i momenti di incastro perfetto agenti sulla stessa trave e nelle medesime condizioni di carico quando le estremità della trave sono incastrate anziché appoggiate. Invertendo le A1.9 ed A1.10 si ottiene il legame fra  $\bar{M}_A$  ed  $\bar{M}_B$  e le rotazioni  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$ . Tale legame risulta il seguente:

$$\bar{M}_A = -\frac{2EJ}{l}(2\varphi_A + \varphi_B) \quad \text{A1.11}$$

$$\bar{M}_B = \frac{2EJ}{l}(\varphi_A + 2\varphi_B) \quad \text{A1.12}$$

Ricordiamo che per il tipo di carico considerato si ha  $\varphi_A > 0$  e  $\varphi_B < 0$  e che le A1.11 ed A1.12 devono fornire per  $\bar{M}_A$  ed  $\bar{M}_B$  valori negativi. Ne segue che fra  $\varphi_A$  e  $\varphi_B$  deve sussistere la seguente relazione (valida in generale nel caso di carichi verticali arbitrari):

$$\varphi_A > \left| \frac{\varphi_B}{2} \right| \quad \text{A1.13}$$

Le formule A1.11 ed A1.12 trovano notevoli applicazioni nella teoria delle travi incastrate elasticamente agli estremi e quindi, in particolare, nella teoria dei telai piani.

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

## **BIBLIOGRAFIA GENERALE**

- [1] O. Belluzzi, “Scienza delle Costruzioni”, Vol. 1, Zanichelli.
- [2] M. Capurso, “Lezioni di Scienza delle Costruzioni”, Pitagora Editrice.