M. G. BUSATO

INTRODUZIONE AL FORMALISMO LAGRANGIANO DEI SISTEMI DISCRETI

SOMMARIO

In questa memoria, dopo una breve introduzione di carattere generale necessaria per inquadrare l'argomento, viene definito e analizzato nei suoi aspetti generali il formalismo lagrangiano dei sistemi discreti. Contrariamente all'impostazione solitamente adottata, per affrontare l'argomento si è preferito utilizzare un approccio prettamente assiomatico e sistematico. Si è ritenuto infatti che una tale impostazione possa chiarire al meglio le caratteristiche del formalismo in esame ed al tempo stesso consenta di evidenziarne in modo più preciso le differenze con altri formalismi ad esso affini, come ad esempio, il formalismo hamiltoniano dei sistemi discreti (*trattato in un'altra memoria*). *Nella presente memoria, le principali peculiarità del formalismo lagrangiano dei sistemi discreti sono state raggruppate per affinità e vengono tutte completamente dimostrate, anche utilizzando più di una tecnica di dimostrazione. Ciò consente, fra l'altro, di inquadrare in un'unica stesura i diversi approcci che sovente si trovano in letteratura riguardo all'argomento in esame. Chiaramente, per ragioni di brevità, nella presente memoria è fornita solo una introduzione al formalismo lagrangiano dei sistemi discreti; in particolare quindi non sono trattati i problemi analitici inerenti al formalismo stesso, come, ad esempio, la caratterizzazione delle proprietà formali dello spazio delle configurazioni e delle fasi e le relative conseguenze.*

1. INTRODUZIONE

Diremo genericamente che un sistema fisico Σ è un *sistema discreto* se l'evoluzione del suo stato può essere rappresentata per mezzo di una funzione regolare $\tilde{x}: K \times X \to X$ dove $K \subseteq R$ ed $X \subseteq R^N$ sono dotati entrambi di una adeguata struttura matematica. Precisamente, si richiede che fissata in *K* la coordinata *t* ed in *X* le coordinate $x^1, x^2, ..., x^N$, l'evoluzione dello stato di Σ sia fornita per ogni $x_0 \in X$ dalla relazione:

$$x^i = \tilde{x}^i(t; x_0) \quad \text{con la condizione} \quad x_0{}^i = \tilde{x}^i(0; x_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{1.1}$$

Nel seguito, l'insieme *X* dotato della adeguata struttura matematica ad esso associata, sarà detto *spazio degli stati* di Σ e rappresenterà Σ a tutti gli effetti.

Sia Σ un sistema discreto qualsiasi. Dalla definizione di sistema discreto ora data, risulta naturale assumere che a Σ possa essere associato un operatore $\hat{S}_\Sigma$ definito su una opportuna classe di funzioni regolari $\tilde{y}: K \to Y$, $Y \subseteq R^n$, $n \leq N$, in modo tale che l'equazione:

$$\hat{S}_\Sigma \, \tilde{y} = 0 \tag{1.2}$$

determini per ogni $x_0 \in X$, tramite le sue soluzioni, l'evoluzione dello stato di Σ nel senso precisato dalla 1.1. Si assume che l'insieme *Y* sia dotato di una adeguata struttura matematica e che sia fissata una corrispondenza fra gli elementi di *Y* e gli elementi di *X* in modo tale che dalla conoscenza delle soluzioni della equazione 1.2 si possa ottenere l'evoluzione dello stato di Σ nel senso precisato dalla 1.1. L'insieme *Y* dotato della adeguata struttura matematica ad esso associata sarà detto nel seguito *spazio base* di Σ e le equazioni 1.2 saranno indicate col nome di *equazioni del moto* di Σ. Lo spazio base può ovviamente coincidere con lo spazio degli stati.

Ammettendo valida l'impostazione sopra indicata, lo spazio base *Y*, la correlazione che lega gli elementi di *Y* a quelli dello spazio degli stati *X* consentendo di descrivere l'evoluzione dello stato di Σ per mezzo delle funzioni $\tilde{y}$, e l'operatore $\hat{S}_\Sigma$, definiscono manifestamente un determinato formalismo atto allo studio del sistema Σ: noi lo chiameremo un S_Σ-formalismo. Quando ad un sistema fisico discreto Σ può applicarsi un determinato S_Σ-formalimo è uso dire che Σ è un S_Σ-sistema. Chiaramente, solo il riscontro sperimentale può stabilire su ad un dato sistema fisico Σ può applicarsi o no un determinato S_Σ-formalismo.

Nei prossimi paragrafi definiremo ed analizzeremo brevemente, illustrandone le principali proprietà il cosiddetto *formalismo lagrangiano* che rientra nel caso generale di S_Σ-formalismo sopra esposto e consente di studiare ampie classi di sistemi fisici discreti (detti per tale ragione *sistemi lagrangiani*).

2. DEFINIZIONE DEL FORMALISMO LAGRANGIANO

Nel formalismo lagrangiano lo spazio base *Y* è una varietà differenziabile di dimensione *n* detta *spazio delle configurazioni*, e lo spazio degli stati *X* è identificato con il fibrato tangente di *Y* ; esso è quindi una varietà differenziabile di dimensione $N = 2n$ e viene detto *spazio delle fasi*. Sia T_Y il fibrato tangente di Y e $K \subseteq R$. Il formalismo lagrangiano è completato introducendo una funzione reale di classe C^2 definita su $T_Y \times K$, detta *lagrangiana*:

$$L : T_Y \times K \to R \qquad 2.1$$

ed il corrispondente funzionale $S[L]$, detto *integrale d'azione*. Si assume infine, che le equazioni del moto si ottengano dal funzionale $S[L]$ per mezzo del cosiddetto *principio di azione stazionaria*, cioè imponendo, nel senso del calcolo delle variazioni, l'annullamento della variazione prima di $S[L]$:

$$\delta S[L] = 0 \qquad 2.2$$

Indichiamo con q^j, $j = 1, 2, \ldots, n$, le coordinate fissate in Y: esse prendono il nome di *coordinate lagrangiane* o *coordinate generalizzate* del sistema. In T_Y risultano così fissate le coordinate $(q^j, \dot{q}^j)$ e se si assume:

$$\dot{q}^j = \frac{dq^j}{dt} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n), \qquad 2.3$$

fissiamo in K la coordinata t. Le quantità $\dot{q}^j$ sono dette *velocità generalizzate* corrispondenti alle coordinate lagrangiane q^j e la variabile t è identificata col tempo. Allora $L = L(q^j, \dot{q}^j, t)$ e per definizione si ha:

$$S[L] = \int_{t_1}^{t_2} L(q^j, \dot{q}^j, t)\, dt \qquad 2.4$$

dove t_1, t_2 sono valori arbitrari di t da considerarsi costanti; si assume $t_2 > t_1$.

Le equazioni del moto si ottengono imponendo al funzionale 2.4 la condizione di stazionarietà 2.2, sotto le ipotesi:

$$\delta q^j(t_1) = 0 \quad ; \quad \delta q^j(t_2) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 2.5$$

Esse, applicando note formule del calcolo delle variazioni, risultano le seguenti e vengono dette *equazioni di Lagrange*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 2.6$$

Le 2.6 definiscono esplicitamente l'operatore $\hat{S}$ introdotto tramite la 1.2. Come si vede, nel contesto in esame esso risulta caratterizzato dalla funzione L. Per risolvere un problema concreto, alle equazioni 2.6 devono essere associate condizioni iniziali della forma seguente:

$$q^j(0) = q_0^j \quad ; \quad \dot{q}^j(0) = \dot{q}_0^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 2.7$$

con $q_0^j, \dot{q}_0^j$ valori costanti (arbitrari o soggetti ad opportune restrizioni) che, per l'ipotesi assunta circa la natura dello spazio delle fasi *X*, rappresentano lo stato iniziale del sistema. Sia $\overline{q}^j(t)$ la soluzione del problema differenziale 2.6 – 2.7 (supposta esistente ed unica). Allora l'evoluzione dello stato del sistema a partire dallo stato $x_0 = (q_0^j, \dot{q}_0^j)$ è fornita dalla coppia ($\overline{q}^j(t), \dot{\overline{q}}^j(t)$).

3. INVARIANZE INTRINSECHE DEL FORMALISMO LAGRANGIANO

Il formalismo lagrangiano presenta due importanti invarianze intrinseche, cioè proprie del formalismo. Si può dimostrare infatti che:

(1) Le equazioni del moto corrispondenti ad una assegnata lagrangiana *L* mantengono la forma 2.6 qualunque siano le coordinate fissate nello spazio delle configurazioni *Y*.

(2) Le equazioni del moto corrispondenti ad una assegnata lagrangiana *L* non cambiano se alla funzione *L* si somma la derivata totale rispetto a *t* di una qualunque funzione differenziabile $F: Y \times K \to R$.

La proprietà (1) significa che se nello spazio delle configurazioni si esegue il cambiamento di coordinate $q^j \to q'^j$ con conseguente variazione delle velocità generalizzate $\dot{q}^j \to \dot{q}'^j$ e cambiamento di forma della lagrangiana $L \to L'$, allora le equazioni del moto subiscono la seguente trasformazione:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \quad \to \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'^j}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q'^j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{3.1}$$

Esse mantengono quindi la forma 2.6. Si noti che l'invarianza della forma 2.6 delle equazioni del moto rispetto al cambiamento di coordinate lagrangiane $q^j \to q'^j$ rappresentata dalla 3.1, non significa però che esplicitamente le equazioni del moto siano identiche nelle variabili q^j e q'^j. Di ciò è facile rendersi conto con un calcolo diretto.

La proprietà (2) significa invece che la funzione lagrangiana non è in pratica univocamente definita. Si noti che nel caso ora in esame, in cui si utilizzano sempre le medesime coordinate lagrangiane q^j, le equazioni del moto sono esplicitamente le medesime sia che si usi la lagrangiana *L* che la lagrangiana ottenuta sommando ad *L* la derivata totale rispetto a *t* di una qualunque funzione differenziabile $F: Y \times K \to R$.

<u>Dimostrazione della proprietà (1)</u>

Per dimostrare la proprietà (1) consideriamo il seguente cambiamento invertibile di coordinate nello spazio delle configurazioni:

$$q^j \to q'^j = \widehat{f}^j(q^1, q^2, \dots, q^n, t) \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{3.2}$$

Chiaramente, come conseguenza del cambiamento di coordinate 3.2:

$$L(q^j, \dot{q}^j, t) \to L'(q'^j, \dot{q}'^j, t) = L(f^j(q^k, t),\ \dot{f}^j(q^k, t), t) \tag{3.3}$$

dove con f^j si sono indicate le inverse delle funzioni $\widehat{f}^j$, e conseguentemente:

$$S[L] \to S[L'] \qquad 3.4$$

dove, per definizione:

$$S[L'] = \int_{t_1}^{t_2} L'(q'^j, \dot{q}'^j, t)\, dt \qquad 3.5$$

Applicando al funzionale $S[L']$ la condizione di stazionarietà 2.2, si ottengono le seguenti equazioni del moto:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'^j}\right) - \frac{\partial L'}{\partial q'^j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 3.6$$

Le equazioni del moto in termini della funzione L' che rappresenta la funzione *L* rispetto alle coordinate lagrangiane q'^j, risultano quindi analoghe a quelle in termini della funzione *L* e la proprietà (1) è dimostrata.

Dimostrazione della proprietà (2)

Per dimostrare la proprietà (2) consideriamo la funzione $L': T_Y \times K \to R$ così definita:

$$L'(q^i, \dot{q}^i, t) = L(q^i, \dot{q}^i, t) + \frac{d}{dt} F(q^i, t) \qquad 3.7$$

e scriviamone il corrispondente integrale d'azione. Si ha:

$$S[L'] = \int_{t_1}^{t_2} \left[L(q^i, \dot{q}^i, t) + \frac{d}{dt} F(q^i, t) \right] dt = \int_{t_1}^{t_2} L(q^i, \dot{q}^i, t)\, dt \; + \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} F(q^i, t)\, dt =$$

$$= S[L] + \int_{t_1}^{t_2} dF(q^i, t) \; = S[L] + F_2 - F_1 \qquad 3.8$$

dove si è posto $F_2 = F(q^i(t_2), t_2)$, $F_1 = F(q^i(t_1), t_1)$.

Ma allora, essendo F_2 ed F_1 delle costanti, risulta:

$$\delta S[L'] = \delta S[L]$$

e di conseguenza le equazioni del moto corrispondenti alla lagrangiana L' risultano identiche alle equazioni del moto corrispondenti alla lagrangiana *L*. La proprietà (2) è quindi dimostrata.

Le due proprietà intrinseche del formalismo lagrangiano ora dimostrate ed in particolare la proprietà (2) possono essere opportunamente sfruttate per la soluzione di problemi concreti.

4. IL TEOREMA DI NOETHER – LEGGI DI CONSERVAZIONE

Il teorema di Noether stabilisce un legame tra l'invarianza del funzionale $S[L]$ a seguito dell'azione di un gruppo di trasformazioni agenti sulle coordinate lagrangiane ed il tempo, e la esistenza di determinate leggi di conservazione proprie del sistema. Il teorema è importante non solo perché consente di individuare le leggi di conservazione corrispondenti ad una determinata lagrangiana ma anche perché consente di stabilire dei criteri di selezione sulla forma della lagrangiana affinché risultino verificate assegnate legge di conservazione.

Ricordiamo innanzitutto il concetto di gruppo di trasformazioni differenziabili ad un parametro (o differomorfismo ad un parametro). Sia Z un insieme dotato di struttura matematica opportuna e $G_a = \{g_a, a \in R\}$ una famiglia monoparametrica di trasformazioni su Z :

$$z \underset{g_a}{\rightarrow} z' \qquad z, z' \in Z \;\; , \;\; g_a \in G_a \tag{4.1}$$

La famiglia G_a è detta un *gruppo di trasformazioni di parametro a su Z,* se per ogni $z \in Z$ si ha:

$$g_0(z) = z \tag{4.2}$$

$$g_{a_1}(g_{a_2}(z)) = g_{a_1+a_2}(z) \qquad \forall\; a_1, a_2 \in R \tag{4.3}$$

Supponiamo che G_a soddisfi alle condizioni 4.2 – 4.3 per cui G_a sia un gruppo di trasformazioni di parametro *a* su *Z*. Allora operativamente l'azione degli elementi di G_a sugli elementi di *Z* è ottenuta per mezzo di una funzione $\gamma : Z \times R \rightarrow Z$ secondo la legge seguente:

$$z \underset{g_a}{\rightarrow} z' = \gamma(z;a) \tag{4.4}$$

Il gruppo di trasformazioni G_a è detto un *gruppo di trasformazioni differenziabili* (o un *differomorfismo*) se γ è una funzione differenziabile. Nel caso dei gruppi di trasformazioni differenziabili è possibile dare una semplice caratterizzazione delle cosiddette *trasformazioni infinitesime* del gruppo, cioè le trasformazioni individuate da un valore di *a* prossimo a zero. Infatti, se $|a| << 1$ possiamo scrivere:

$$z \underset{g_a}{\rightarrow} z' = \gamma(z;0) + \left(\frac{d}{da}\gamma(z;a) \right)_{a=0} a + \cdots \tag{4.5}$$

e quindi, avvalendosi della proprietà 4.2, risulta che per le trasformazioni infinitesime vale la seguente rappresentazione:

$$z \underset{g_a}{\rightarrow} z' = z + \left(\frac{d\gamma}{da} \right)_{a=0} a \tag{4.6}$$

Dopo avere brevemente introdotto la nozione di gruppo di trasformazioni differenziabili, siamo in grado di enunciare e dimostrare il teorema di Noether (per i sistemi discreti). Esso, come si è detto, può anche essere utilizzato per costruire col formalismo lagrangiano dei modelli matematici di sistemi fisici in cui risultino soddisfatte determinate leggi di conservazione.

<u>Teorema 4.1</u> Teorema di Noethet (per i sistemi discreti)

Sia $\overline{q}^j(t)$, j = 1, 2, …, n, la soluzione delle equazioni del moto 2.6 corrispondente ad arbitrarie condizioni iniziali 2.7 e $G_a = \{g_a, a \in R\}$ un gruppo di trasformazioni differenziabili di parametro a che agisce sulle coppie ordinate $(\overline{q}^j(t), t)$. Supponiamo che l'azione degli elementi di G_a avvenga nel modo seguente:

$$\overline{q}^j(t) \underset{g_a}{\rightarrow} \overline{q}'^j(t') = \Phi^j(\overline{q}^1(\phi(t;a)), \overline{q}^2(\phi(t;a)), ..., \overline{q}^n(\phi(t;a)); a) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.7}$$

$$t \underset{g_a}{\rightarrow} t' = \varphi(t;a) \tag{4.8}$$

dove Φ^j, ϕ e φ sono funzioni differenziabili, e poniamo:

$$\delta_a S[L] = \int_{t'_1}^{t'_2} L(\varphi(t;a), \Phi^j(\overline{q}^k(\phi(t;a));a), \dot{\Phi}^j(\overline{q}^k(\phi(t;a));a))\, dt \; - \int_{t_1}^{t_2} L(t, \overline{q}^j(t), \dot{\overline{q}}^j(t)) dt \tag{4.9}$$

Allora, se per ogni elemento di G_a risulta:

$$\delta_a S[L] = 0 \tag{4.10}$$

la grandezza:

$$J = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}^j} \dot{\overline{q}}^j - L \right) \left(\frac{d\varphi}{da} \right)_{a=0} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}^j} \left(\frac{d\Phi^j}{da} \right)_{a=0} \tag{4.11}$$

è una costante del moto.

<u>Dimostrazione</u>

Osserviamo innanzitutto che la condizione 4.9 rappresenta l'invarianza in forma dell'integrale d'azione per le trasformazioni del gruppo G_a. Dobbiamo dimostrare che tale invarianza implica l'integrale del moto 4.11 e a tale scopo riferiamoci alle trasformazioni infinitesime di G_a, la cui azione può essere schematizzata nel modo seguente:

$$\overline{q}^j(t) \underset{g_a}{\rightarrow} \overline{q}'^j(t') = \overline{q}^j(t) + \delta_a \overline{q}^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.12}$$

$$t \underset{g_a}{\rightarrow} t' = t + \delta_a t \tag{4.13}$$

dove, conformemente alla 4.6:

$$\delta_a \overline{q}^j = \left(\frac{d\Phi^j}{da} \right)_{a=0} a \qquad ; \qquad \delta_a t = \left(\frac{d\varphi}{da} \right)_{a=0} a \qquad (j = 1, 2, \ldots, n \; ; \; a \ll 1) \tag{4.14}$$

E' evidente che sotto l'azione di una trasformazione infinitesima di G_a:

$$L(t,\bar{q}^j(t),\dot{\bar{q}}^j(t)) \underset{g_a}{\rightarrow} L(t',\bar{q}'^j(t'),\dot{\bar{q}}'^j(t')) = L(t,\bar{q}^j(t),\dot{\bar{q}}^j(t)) + \delta_a L \qquad 4.15$$

Utilizzando la 4.13 e la 4.15, dalla 4.9 si ottiene allora che nel caso in esame $\delta_a S[L]$ risulta fornito dalla seguente espressione, nella quale per determinare gli integrali a secondo membro è sufficiente considerare solo i termini contenenti linearmente le variazioni:

$$\delta_a S[L] = \int_{t_1+\delta_a t}^{t_2+\delta_a t} L(t,\bar{q}^j(t),\dot{\bar{q}}^j(t))\, dt \quad + \int_{t_1+\delta_a t}^{t_2+\delta_a t} \delta_a L\, dt \quad - \int_{t_1}^{t_2} L(t,\bar{q}^j(t),\dot{\bar{q}}^j(t)) dt \qquad 4.16$$

Poiché, a meno di infinitesimi di ordine superiore:

$$\int_{t_1+\delta_a t}^{t_2+\delta_a t} L(t,\bar{q}^j(t),\dot{\bar{q}}^j(t))\, dt \quad = \int_{t_1}^{t_2} L(t,\bar{q}^j(t),\dot{\bar{q}}^j(t)) dt \quad + \int_{t_1}^{t_2} L(t,\bar{q}^j(t),\dot{\bar{q}}^j(t))\, \frac{d}{dt}(\delta_a t)\, dt \qquad 4.17$$

$$\int_{t_1+\delta_a t}^{t_2+\delta_a t} \delta_a L\, dt \quad = \int_{t_1}^{t_2} \delta_a L\, dt \qquad 4.18$$

la 4.16 fornisce per $\delta_a S[L]$ l'espressione seguente alla quale nel seguito dovrà farsi riferimento per dimostrare il teorema:

$$\delta_a S[L] = \int_{t_1}^{t_2} \delta_a L\, dt \quad + \int_{t_1}^{t_2} L(t,\bar{q}^j(t),\dot{\bar{q}}^j(t)) \frac{d}{dt}(\delta_a t)\, dt \qquad 4.19$$

Scriviamo ora formalmente:

$$\delta_a \bar{q}^j \equiv \bar{q}'^j(t') - \bar{q}^j(t) = \bar{q}'^j(t') - \bar{q}'^j(t) + \bar{q}'^j(t) - \bar{q}^j(t) \qquad 4.20$$

e poniamo:

$$\hat{\delta}_a \bar{q}^j = \bar{q}'^j(t') - \bar{q}'^j(t) \qquad 4.21$$

$$\tilde{\delta}_a \bar{q}^j = \bar{q}'^j(t) - \bar{q}^j(t) \qquad 4.22$$

Allora, essendo, in virtù della 4.13 e della 4.22:

$$\hat{\delta}_a \bar{q}^j = \frac{d\bar{q}'^j}{dt}\delta_a t = \frac{d}{dt}(\bar{q}^j(t) + \tilde{\delta}_a \bar{q}^j)\ \delta_a t = \frac{d\bar{q}^j}{dt}\delta_a t + \frac{d}{dt}(\tilde{\delta}_a \bar{q}^j)\ \delta_a t \qquad 4.23$$

possiamo scrivere, trascurando come è lecito gli infinitesimi di ordine superiore:

$$\delta_a \bar{q}^j = \tilde{\delta}_a \bar{q}^j + \dot{\bar{q}}^j \delta_a t \qquad 4.24$$

Si noti che la variazione $\tilde{\delta}_a \bar{q}^j$ è di fatto incognita però, come vedremo, questa circostanza è irrilevante in quanto $\tilde{\delta}_a \bar{q}^j$ serve solo in passaggi intermedi.

Analogamente alla 4.24, si può poi scrivere:

$$\delta_a L = \tilde{\delta}_a L + \frac{dL}{dt}\delta_a t \tag{4.25}$$

dove:

$$\tilde{\delta}_a L = \frac{\partial L}{\partial \bar{q}^j}\tilde{\delta}_a \bar{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\tilde{\delta}_a \dot{\bar{q}}^j \tag{4.26}$$

mentre:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \bar{q}^j}\dot{\bar{q}}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\ddot{\bar{q}}^j + \frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.27}$$

Poiché derivando nella 4.22 ambo i membri rispetto a t si ottiene:

$$\tilde{\delta}_a \dot{\bar{q}}^j = \frac{d}{dt}(\tilde{\delta}_a \bar{q}^j) \tag{4.28}$$

dalla 4.26 segue che:

$$\tilde{\delta}_a L = \frac{\partial L}{\partial \bar{q}^j}\tilde{\delta}_a \bar{q}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\frac{d}{dt}(\tilde{\delta}_a \bar{q}^j) = \frac{\partial L}{\partial \bar{q}^j}\tilde{\delta}_a \bar{q}^j + \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\right)\tilde{\delta}_a \bar{q}^j\right] - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\right)\tilde{\delta}_a \bar{q}^j =$$

$$= \left[\frac{\partial L}{\partial \bar{q}^j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\right)\right]\tilde{\delta}_a \bar{q}^j + \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\right)\tilde{\delta}_a \bar{q}^j\right] = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\right)\tilde{\delta}_a \bar{q}^j\right] \tag{4.29}$$

Nell'ultimo passaggio della 4.29 si è tenuto conto del fatto che le $\bar{q}^j(t)$ sono per ipotesi le soluzioni delle equazioni del moto e quindi soddisfano identicamente alle 3.6. Così, avvalendoci della 4.24 per eliminare l'indeterminata $\tilde{\delta}_a \bar{q}^j$, possiamo concludere che:

$$\tilde{\delta}_a L = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\right)(\delta_a \bar{q}^j - \dot{\bar{q}}^j \delta_a t)\right] \tag{4.30}$$

Utilizzando nella 4.25 l'espressione di $\tilde{\delta}_a L$ ora ottenuta, si perviene allora alla seguente espressione per la variazione $\delta_a L$:

$$\delta_a L = \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\right)(\delta_a \bar{q}^j - \dot{\bar{q}}^j \delta_a t)\right] + \frac{dL}{dt}\delta_a t \tag{4.31}$$

e di conseguenza dalla 4.19 si trae:

$$\delta_a S[L] = \int_{t_1}^{t_2} \delta_a L\, dt \;+\; \int_{t_1}^{t_2} L \frac{d}{dt}(\delta_a t)\, dt \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\right)(\delta_a \bar{q}^j - \dot{\bar{q}}^j \delta_a t)\right] dt \;+\; \int_{t_1}^{t_2} \frac{dL}{dt} \delta_a t\, dt \;+$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} L \frac{d}{dt}(\delta_a t)\, dt \;=\; \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\right)(\delta_a \bar{q}^j - \dot{\bar{q}}^j \delta_a t)\right] dt \;+\; \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}(L\, \delta_a t)\, dt \qquad 4.32$$

ovvero, in definitiva (raccogliendo anche un segno “meno” a secondo membro):

$$\delta_a S[L] = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\dot{\bar{q}}^j - L\right)\delta_a t - \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\delta_a \bar{q}^j\right] dt \qquad 4.33$$

Avvalendosi delle 4.14 si ha quindi per $\delta_a S[L]$ la seguente espressine:

$$\delta_a S[L] = -\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\dot{\bar{q}}^j - L\right)\left(\frac{d\varphi}{da}\right)_{a=0} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\left(\frac{d\Phi^j}{da}\right)_{a=0}\right] a\; dt \qquad 4.34$$

Ciò mostra che se $\delta_a S[L] = 0$ per ogni valore di *a*, la grandezza:

$$J = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\dot{\bar{q}}^j - L\right)\left(\frac{d\varphi}{da}\right)_{a=0} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\left(\frac{d\Phi^j}{da}\right)_{a=0} \qquad 4.35$$

è una costante del moto. Il teorema è quindi dimostrato.

Applichiamo ora a titolo d’esempio il teorema di Noether ora dimostrato a due casi particolarmente significativi; quello della cosiddetta *traslazione delle coordinate lagrangiane* e quello della cosiddetta *traslazione del tempo*.

Traslazione delle coordinate generalizzate (conservazione dell’impulso generalizzato)

Supponiamo che l’azione del gruppo G_a sia definita dalle seguenti relazioni:

$$\bar{q}^j(t) \underset{g_a}{\to} \bar{q}'^j(t') = \bar{q}^j(t) + \delta_k^j\, a \qquad (k \text{ valore assegnato fra } 1, 2, \ldots, n) \qquad 4.36$$

$$t \underset{g_a}{\to} t' = t \qquad 4.37$$

dove nella 4.36 δ_k^j rappresenta il simbolo delta di Kronecker. Allora si ha:

$$\frac{d\Phi^j}{da} = \frac{d}{da}(\bar{q}^j(t) + \delta_k^j a) = \delta_k^j \quad ; \quad \frac{d\varphi}{da} = \frac{d}{da}(t) = 0 \qquad 4.38$$

e dalla 4.11 segue che nel caso in esame è una costante del moto la grandezza:

$$p^k = \frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}^k} \tag{4.39}$$

manifestamente associata alla coordinata lagrangiana q^k. Le grandezze p^j definite genericamente dalla relazione:

$$p^j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.40}$$

sono dette *momenti cinetici* coniugati alle coordinate lagrangiane q^j o anche *impulsi generalizzati*. Come abbiamo dimostrato, il momento cinetico p^k coniugato alla coordinata lagrangiana q^k è una costante del moto qualora l'integrale d'azione $S[L]$ sia invariante sotto l'azione del gruppo G_a caratterizzato dalle 4.36 – 4.37. Al fine di stabilire quali condizioni debbono essere soddisfatte dalla lagrangiana L affinché p^k sia una costante del moto, deriviamo rispetto al tempo ambo i membri della 4.39. Si ha:

$$\frac{d\,p^k}{d\,t} = \frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}^k}\right) \tag{4.41}$$

Ma la funzione $\overline{q}^k(t)$ è per ipotesi una soluzione delle equazioni del moto del sistema e quindi:

$$\frac{d}{d\,t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\overline{q}}^k}\right) = \frac{\partial L}{\partial \overline{q}^k} \tag{4.42}$$

Possiamo perciò concludere che:

$$\frac{d\,p^k}{d\,t} = \frac{\partial L}{\partial \overline{q}^k} \tag{4.43}$$

Ne segue che l'impulso generalizzato p^k è una costante del moto solo se la lagrangiana L non contiene la coordinata generalizzata q^k.

<u>Traslazione del tempo (conservazione dell'energia totale)</u>

Supponiamo che l'azione del gruppo G_a sia definita dalle seguenti relazioni:

$$\overline{q}^j(t) \underset{g_a}{\rightarrow} \overline{q}'^j(t') = \overline{q}^j(t) \tag{4.44}$$

$$t \underset{g_a}{\rightarrow} t' = t + a \tag{4.45}$$

Allora si ha:

$$\frac{d\Phi^j}{d\,a} = \frac{d}{d\,a}(\overline{q}^j(t)) = 0 \qquad \frac{d\varphi}{da} = \frac{d}{da}(t+a) = 1 \tag{4.46}$$

e dalla 4.11 segue che nel caso in esame è una costante del moto la grandezza:

$$E = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j} \dot{\bar{q}}^j - L \qquad 4.47$$

manifestamente associata al sistema nel suo complesso. La grandezza E definita genericamente dalla relazione:

$$E = \frac{\partial L}{\partial q^j} \dot{q}^j - L \qquad 4.48$$

ovvero, per la 4.40, dalla relazione:

$$E = \sum_{j=1}^{n} p^j \dot{q}^j - L \qquad 4.49$$

è detta *energia totale* del sistema. Essa, come abbiamo dimostrato, è una costante del moto qualora l'integrale d'azione $S[L]$ sia invariante sotto l'azione del gruppo G_a caratterizzato dalle 4.44 – 4.45. Al fine di stabilire quali condizioni debbono essere soddisfatte dalla lagrangiana L affinché E sia una costante del moto, deriviamo rispetto al tempo ambo i membri della 4.47. Si ha:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\right) \dot{\bar{q}}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j} \ddot{\bar{q}}^j - \frac{dL}{dt} \qquad 4.50$$

Ma le funzioni $\bar{q}^j(t)$ sono per ipotesi soluzione delle equazioni del moto del sistema e quindi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j}\right) = \frac{\partial L}{\partial \bar{q}^j} \qquad 4.51$$

Inoltre si ha:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \bar{q}^j} \dot{\bar{q}}^j + \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{q}}^j} \ddot{\bar{q}}^j + \frac{\partial L}{\partial t} \qquad 4.52$$

Possiamo perciò concludere che:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} \qquad 4.53$$

Ne segue che l'energia totale E del sistema è una costante del moto solo se la lagrangiana L non dipende esplicitamente dal tempo.

Come abbiamo detto, il teorema di Noether consente di stabilire dei criteri per definire lagrangiane rispondenti ad assegnate legge di conservazione. In effetti quanto sopra ottenuto mostra ad esempio che se si richiede la conservazione dell'energia totale, allora la lagrangiana non deve contenere esplicitamente il tempo. La portata del teorema è però molto più vasta, tuttavia uno studio approfondito della questione esula dai fini del presente scritto in quanto coinvolge i metodi generali relativi alla formulazione assiomatica delle teorie fisiche.

5. SISTEMI LAGRANGIANI NON DEGENERI

Si dice che un sistema lagrangiano è *non degenere* se il determinante hessiano della funzione lagrangiana L rispetto alle $\dot{q}^j$ è sempre non nullo, cioè se per ogni valore delle coordinate lagrangiane scelte, risulta:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^1 \partial \dot{q}^n} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2 \partial \dot{q}^1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2 \partial \dot{q}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^2 \partial \dot{q}^n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^1} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^n \partial \dot{q}^n} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad 5.1$$

Per i sistemi lagrangiani non degeneri si hanno alcune importanti particolarità. Le principali sono le seguenti, delle quali la prima è quella principale in quanto da essa discendono anche le altre:

(1) Le velocità generalizzate $\dot{q}^j$ possono sempre essere scritte come funzione delle coordinate lagrangiane q^j e dei corrispondenti momenti cinetici p^j.

(2) Le equazioni del moto possono sempre essere scritte in forma normale rispetto alle $\ddot{q}^j$.

(3) Le equazioni del moto possono sempre essere scritte in una particolare forma normale del primo ordine particolarmente simmetrica, che prende il nome di forma canonica.

La proprietà (1) significa che il sistema di equazioni algebriche:

$$p^j = \frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial \dot{q}^j} \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.2$$

è invertibile rispetto alle $\dot{q}^j$, per cui si può scrivere:

$$\dot{q}^j = \psi^j(q^k, p^k, t) \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.3$$

dove ψ^j sono delle funzioni di classe C^1 la cui espressione dipende da quella della lagrangiana L. Questa circostanza implica peraltro che lo stato del sistema può essere anche individuato dalle coppie ordinate (q^j, p^j).

La proprietà (2) significa che le equazioni esplicite del moto possono essere scritte nella forma seguente:

$$\ddot{q}^j = F^j(q^k, \dot{q}^k, t) \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.4$$

dove F^j sono delle opportune funzioni la cui espressione dipende da quella della lagrangiana L.

Questa circostanza implica peraltro che la conoscenza dello stato iniziale del sistema fornita dalla coppia ordinata $(q_0^j, \dot{q}_0^j)$ non richiede eventuali condizioni sui valori delle costanti q_0^j e $\dot{q}_0^j$. Si veda a questo proposito quanto detto al termine del paragrafo 2.

La proprietà (3) significa che le equazioni del moto, che in base alle 2.6 costituiscono un sistema differenziale di *n* equazioni del secondo ordine, possono anche scriversi come un sistema differenziale di $2n$ equazioni del primo ordine di forma normale e particolare struttura. Infatti, utilizzando come incognite le coordinate lagrangiane q^j ed i corrispondenti momenti cinetici coniugati p^j ed introducendo la funzione:

$$H(q^k, p^k, t) = [\sum_{k=1}^{n} p^k \dot{q}^k - L(q^k, \dot{q}^k, t)]\Big|_{\dot{q}^k = \psi^k(q^h, p^h, t)} \qquad 5.5$$

risulta che le equazioni del moto del sistema assumono la forma seguente, detta *canonica* (o hamiltoniana per ragioni che risulteranno chiare dallo studio del cosiddetto formalismo hamiltoniano):

$$\dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p^j} \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.6$$

$$\dot{p}^j = -\frac{\partial H}{\partial q^j} \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.7$$

Per risolvere un problema concreto alle equazioni 5.6 – 5.7 devono essere associate condizioni iniziali della forma seguente:

$$q^j(0) = q_0^j \quad ; \quad p^j(0) = p_0^j \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.8$$

con q_0^j, p_0^j valori costanti arbitrari che, come si è detto in precedenza, rappresentano lo stato iniziale del sistema. Sia $(\bar{q}^j(t), \bar{p}^j(t))$ la soluzione del problema differenziale 5.6 ÷ 5.8 (supposta esistente ed unica). Allora la coppia ordinata $(\bar{q}^j(t), \bar{p}^j(t))$ descrive l'evoluzione dello stato del sistema a partire dallo stato $x_0 = (q_0^j, p_0^j)$.

Dimostrazione della proprietà (1)

Per dimostrare la proprietà (1) occorre avvalersi del teorema di Dini (v. ad esempio L. Amerio, Analisi Matematica Vol. 2, UTET, Cap. 2, § 4, pag. 105) che nel caso in esame si può enunciare nel modo seguente:

Teorema 5.1 Teorema di Dini (per i sistemi di equazioni)
Sia dato il seguente sistema di *n* equazioni nelle $2n$ variabili p^j, $\dot{q}^j$, ed *r* parametri α^m (*j* = 1, 2, …, *n* ; *m* = 1, 2, …, *r*):

$$f^j(p^k, \dot{q}^k, \alpha^m) = 0 \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.9$$

Allora, se:

(a) le funzioni f^j sono di classe C^1 in un dominio aperto *A* del loro insieme di definizione,

(b) il sistema 5.9 ha in A una radice $\bar{z}$.

(c) il determinante jacobiano delle funzioni f^j rispetto alle variabili $\dot{q}^j$ è diverso da zero in corrispondenza della radice $\bar{z}$,

esiste un opportuno intorno di $\bar{z}$ nel quale il sistema 5.9 è univocamente risolubile rispetto alle variabili $\dot{q}^j$ per cui in tale intorno le 5.9 definiscono implicitamente le $\dot{q}^j$ come funzione delle p^j e dei parametri α^m. Queste funzioni sono di classe C^1.

Per dimostrare la proprietà (1) dei sistemi lagrangiani non degeneri utilizzando il teorema di Dini sopra enunciato, osserviamo che nel caso in esame i parametri α^m devono identificarsi con le coordinate lagrangiane ed il tempo e che (v. 5.2):

$$f^j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - p^j \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{5.10}$$

Le funzioni f^j definite dalla 5.10 sono di classe C^1 sul loro intero insieme di definizione poiché per ipotesi L è una funzione di classe C^2, inoltre il sistema di equazioni da esse formato ammette sempre una radice comunque siano fissati i valori di $q^j, \dot{q}^j$ e t: basta infatti risolvere il sistema rispetto alle p^j. Consideriamo ora la condizione sul determinante jacobiano delle funzioni f^j rispetto alle variabili $\dot{q}^j$. Essa si traduce in una analoga condizione sul determinante hessiano della funzione lagrangiana L rispetto alle $\dot{q}^j$, infatti:

$$\frac{\partial f^j}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} - p^j\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^j} \qquad (j, k = 1, 2, \dots, n) \tag{5.11}$$

Possiamo così concludere che se la lagrangiana L è tale da verificare la condizione 5.1 allora per il sistema:

$$p^j = \frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial \dot{q}^j} \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{5.12}$$

sono sempre verificate le ipotesi del teorema di Dini rispetto alla coppia $(p^j, \dot{q}^j)$ e di conseguenza il sistema in esame definisce implicitamente le $\dot{q}^j$ come funzione delle p^j, nonché delle q^j e del tempo. Ciò consente di scrivere:

$$\dot{q}^j = \psi^j(q^k, p^k, t) \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \tag{5.13}$$

dove ψ^j sono delle funzioni di classe C^1. La proprietà (1) è quindi dimostrata.

Dimostrazione della proprietà (2)

Per dimostrare la proprietà (2) ci si può avvalere della proprietà (1) o anche procedere direttamente. Qui riportiamo entrambe le dimostrazioni.

Approccio 1: utilizzo della proprietà (1)

Derivando rispetto al tempo entrambi i membri delle 5.3, si ottiene:

$$\ddot{q}^j = \frac{\partial \psi^j(q^k, p^k, t)}{\partial q^k}\,\dot{q}^k + \frac{\partial \psi^j(q^k, p^k, t)}{\partial p^k}\,\dot{p}^k + \frac{\partial \psi^j(q^k, p^k, t)}{\partial t} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.14$$

Ma, in forza delle equazioni del moto 2.6:

$$\dot{p}^k = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial \dot{q}^k}\right) = \frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial q^k} \qquad 5.15$$

quindi, oltre alle p^k, anche le $\dot{p}^k$ sono delle funzioni delle $q^j, \dot{q}^j$ e di t. Ne segue che le equazioni 5.14 sono in pratica delle equazioni della forma seguente:

$$\ddot{q}^j = F^j(q^k,\, \dot{q}^k,\, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.16$$

dove F^j sono delle opportune funzioni la cui espressione dipende da quella della lagrangiana L. La proprietà (2) è quindi dimostrata.

<u>Approccio 2: procedura diretta</u>

Con l'Approccio 1 si è dimostrata la proprietà (2) ma tuttavia non si è trovata la forma esplicita delle equazioni 5.4. La procedura diretta consente anche questo. Per dimostrare la proprietà (2) mediante procedura diretta, scriviamo in forma esplicita le equazioni del moto 2.6. Calcolando le derivate della funzione L ed ordinando, si ottengono le equazioni qui sotto riportate:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k}\,\ddot{q}^k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^k}\,\dot{q}^k + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial t} - \frac{\partial L}{\partial q^j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.17$$

Introduciamo ora le seguenti due matrici $n \times n$, la prima delle quali simmetrica e non singolare (in forza della 5.1):

$$\mathbf{A}(q^h, \dot{q}^h, t) = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial \dot{q}^k}\right] \quad ; \quad \mathbf{B}(q^h, \dot{q}^h, t) = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^j \partial q^k}\right] \qquad 5.18$$

ed i seguenti tre vettori colonna:

$$\ddot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \ddot{q}^1 \\ \ddot{q}^2 \\ \vdots \\ \ddot{q}^n \end{bmatrix} \quad ; \quad \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \dot{q}^1 \\ \dot{q}^2 \\ \vdots \\ \dot{q}^n \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{c}(q^h, \dot{q}^h, t) = \begin{bmatrix} \partial^2 L/(\partial \dot{q}^1 \partial t) - \partial L/\partial q^1 \\ \partial^2 L/(\partial \dot{q}^2 \partial t) - \partial L/\partial q^2 \\ \vdots \\ \partial^2 L/(\partial \dot{q}^n \partial t) - \partial L/\partial q^n \end{bmatrix} \qquad 5.19$$

Allora con le notazioni ora introdotte le equazioni 5.17 si possono scrivere nella seguente forma matriciale:

$$\mathbf{A}(q^k, \dot{q}^k, t)\,\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}(q^k, \dot{q}^k, t)\,\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(q^k, \dot{q}^k, t) = 0 \qquad 5.20$$

Poiché **A** è una matrice non singolare, si può moltiplicare la 5.20 a sinistra per l'inversa della matrice **A** dopo di che si ottiene l'equazione matriciale:

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{A}^{-1}(q^k, \dot{q}^k, t)[\mathbf{B}(q^k, \dot{q}^k, t)\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{c}(q^k, \dot{q}^k, t)] \qquad 5.21$$

La 5.21 mostra che le equazioni del moto possono essere scritte in forma normale e ne definisce anche l'espressione. La proprietà (2) è quindi dimostrata.

Dimostrazione della proprietà (3)

Innanzitutto osserviamo che la possibilità di utilizzare come equazioni del moto un sistema differenziale di $2n$ equazioni del primo ordine di forma normale, discende direttamente dalla proprietà (2). Infatti, ponendo:

$$z^j = \dot{q}^j \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.22$$

il sistema differenziale del secondo ordine 5.4 risulta equivalente al seguente sistema differenziale del primo ordine:

$$\dot{q}^j = z^j \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.23$$

$$\dot{z}^j = F^j(q^k, z^k, t) \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.24$$

Il cambiamento di variabili 5.22 non è però il solo che consenta di ricondurre le equazioni del moto ad un sistema differenziale del primo ordine in forma normale. Infatti, tenendo conto che in forza delle equazioni 2.6:

$$\dot{p}^j = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial \dot{q}^j}\right) = \frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial q^j} \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.25$$

dalle 5.2 e 5.3 segue che un sistema differenziale del tipo cercato è anche il seguente:

$$\dot{q}^j = \psi^j(q^k, p^k, t) \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.26$$

$$\dot{p}^j = \left.\frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial q^j}\right|_{\dot{q}^k = \psi^k(q^h, p^h, t)} \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.27$$

Orbene, si può dimostrare che è proprio questo il sistema differenziale del primo ordine rappresentato dalle 5.6 e 5.7. Risulta infatti che introdotta la funzione:

$$H(q^k, p^k, t) = [\sum_{k=1}^{n} p^k \dot{q}^k - L(q^k, \dot{q}^k, t)]\Big|_{\dot{q}^k = \psi^k(q^h, p^h, t)} \qquad 5.28$$

si ha:

$$\frac{\partial H}{\partial p^j} = \psi^j(q^k, p^k, t) \quad ; \quad \frac{\partial H}{\partial q^j} = -\left.\frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial q^j}\right|_{\dot{q}^k = \psi^k(q^h, p^h, t)} \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.29$$

Si noti che la funzione H definita dalla 5.28 non è altro che l'energia totale E del sistema espressa per mezzo delle variabili q^j, p^j e t. Infatti (v. 4.49):

$$E = \sum_{k=1}^{n} p^k \dot{q}^k - L(q^k, \dot{q}^k, t) \qquad 5.30$$

e quindi:

$$H = E\,\Big|_{\dot{q}^k = \psi^k(q^h, p^h, t)} \qquad 5.31$$

Per dimostrare la proprietà (3) si possono seguire diversi approcci, tutti essenzialmente basati sulla proprieà (1). Oltre all'approccio diretto a cui sopra accennato, ci si può avvalere infatti del *teorema di Donkin* (v. ad esempio [4]), della *trasformata di Legendre* (v. ad esempio [13]) oppure della teoria dei *differenziali totali* (v. ad esempio [5]). In questo scritto mostreremo l'uso di tutte le quattro tecniche ora citate.

Approccio 1: procedura diretta

Per dimostrare la proprietà (3) con la procedura diretta basterebbe verificare che la funzione *H* definita dalla 5.28 implica le equazioni 4.29. Questo modo di procedere tuttavia non consente di mettere in luce perché la funzione *H* debba avere la forma 5.28. Adottiamo quindi una via più generale, cercando, se esiste, una funzione $H(q^k, p^k, t)$ attraverso la quale si possano esprimere come gradiente le funzioni ψ^j che compaiono a secondo membro delle 5.26, cioè tale che:

$$\psi^j = \frac{\partial H}{\partial p^j} \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.32$$

Le 5.32 rappresentano una condizione plausibile in quanto le funzioni ψ^j si ottengono invertendo il sistema 5.2 rispetto alle $\dot{q}^j$.

Poniamo genericamente:

$$H(q^k, p^k, t) = F(q^k, p^k, y^k, t)\Big|_{y^k = \psi^k(q^h, p^h, t)} \qquad 5.33$$

e vediamo se è possibile trovare una espressione di *F* in modo tale che siano soddisfatte le 5.32. Dalla 5.33 si ha:

$$\frac{\partial H}{\partial p^j} = \frac{\partial F}{\partial p^j}\bigg|_{y^k = \psi^k} + \frac{\partial F}{\partial y^k}\bigg|_{y^k = \psi^k} \frac{\partial \psi^k}{\partial p^j} \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.34$$

$$\frac{\partial H}{\partial q^j} = \frac{\partial F}{\partial q^j}\bigg|_{y^k = \psi^k} + \frac{\partial F}{\partial y^k}\bigg|_{y^k = \psi^k} \frac{\partial \psi^k}{\partial q^j} \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.35$$

e le condizioni 5.32 risultano quindi verificate se *F* soddisfa al seguente sistema differenziale alle derivate parziali (che segue dalle 5.34):

$$\frac{\partial F}{\partial p^j} + \frac{\partial F}{\partial y^k}\frac{\partial y^k}{\partial p^j} = y^j \qquad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad 5.36$$

Poiché interessa una soluzione qualsiasi del sistema 5.36, assumiamo che *F* sia data dalla somma di due funzioni, di cui una non dipendente dalle p^j; scriviamo quindi:

$$F(q^k, p^k, y^k, t) = F_1(q^k, y^k, t) + F_2(q^k, p^k, y^k, t) \qquad 5.37$$

Allora il sistema 5.36 prende la forma seguente:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial y^k} + \frac{\partial F_2}{\partial y^k}\right)\frac{\partial y^k}{\partial p^j} + \frac{\partial F_2}{\partial p^j} = y^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.38$$

e può essere soddisfatto imponendo che risulti identicamente:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y^j} + \frac{\partial F_2}{\partial y^j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.39$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial p^j} = y^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.40$$

La soluzione completa delle equazioni 5.40 è:

$$F_2 = \sum_{k=1}^{n} p^k y^k + f_2(q^k, y^k, t) \qquad 5.41$$

dove $f_2(q^k, y^k, t)$ rappresenta una funzione arbitraria. Utilizzando la 5.41, le 5.39 forniscono allora per la funzione F_1 le equazioni:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y^j} = -p^j - \frac{\partial f_2(q^k, y^k, t)}{\partial y^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.42$$

che, essendo per definizione (v. 5.2 con la sostituzione formale $\dot{q}^k \to y^k$):

$$p^j = \frac{\partial L(q^k, y^k, t)}{\partial y^k} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.43$$

possono anche scriversi nel modo seguente:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y^j} = -\frac{\partial L(q^k, y^k, t)}{\partial y^j} - \frac{\partial f_2(q^k, y^k, t)}{\partial y^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.44$$

La soluzione completa delle equazioni 5.44 è:

$$F_1 = -L(q^k, y^k, t) - f_2(q^k, y^k, t) + f_1(q^k, t) \qquad 5.45$$

dove $f_1(q^k, t)$ rappresenta una funzione arbitraria. Così, dalla 5.37, segue che le condizioni 5.32 risultano soddisfatte solamente se nella 5.33 si assume:

$$F = \sum_{k=1}^{n} p^k y^k - L(q^k, y^k, t) + f_1(q^k, t) \qquad 5.46$$

dove $f_1(q^k, t)$ è una funzione arbitraria. Dalle 5.35 si ha poi immediatamente (eseguendo la sostituzione formale $y^k \to \dot{q}^k$):

$$\frac{\partial H}{\partial q^j} = -\left.\frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial q^j}\right|_{\dot{q}^k = \psi^k(q^h, p^h, t)} + \frac{\partial f_1(q^k, t)}{\partial q^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.47$$

Possiamo quindi concludere che se si considera nulla la funzione f_1, cioè se si assume:

$$H(q^k, p^k, t) = \left[\sum_{k=1}^{n} p^k \dot{q}^k - L(q^k, \dot{q}^k, t)\right]\Big|_{\dot{q}^k = \psi^k(q^h, p^h, t)} \qquad 5.48$$

allora risulta:

$$\psi^j(q^k, p^k, t) = \frac{\partial H}{\partial p^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.49$$

$$\left.\frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial q^j}\right|_{\dot{q}^k = \psi^k(q^h, p^h, t)} = -\frac{\partial H}{\partial q^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.50$$

Le 5.49 e 5.50 ora dimostrate non sono altro che le 5.29. Resta quindi provato che introdotta la funzione $H(q^k, p^k, t)$ definita dalle 5.5, il sistema differenziale 5.26 – 5.27 può essere scritto nella forma canonica 5.6 – 5.7. La proprietà (3) è quindi verificata. Si noti che questo risultato è stato ottenuto utilizzando la sola condizione 5.32.

<u>Approccio 2: uso del teorema di Donkin</u>

Per dimostrare la proprietà (3) utilizzando il teorema di Donkin enunciamo innanzitutto questo teorema (la cui dimostrazione può trovarsi ad esempio in [4], Cap. II, § 12, pag. 72).

<u>Teorema 5.2</u> Teorema di Donkin
Sia F una funzione di classe C^2 di n variabili x^j ed r parametri α^m, (j = 1, 2, …, n ; m = 1, 2, …, r), il cui determinante hassiano rispetto alle x^j è non nullo, e consideriamo il seguente sistema di n equazioni nelle 2n variabili x^j, y^j :

$$y^j - \frac{\partial F}{\partial x^j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.51$$

Indichiamo quindi con $\psi^j(y^k, \alpha^m)$ le funzioni che rappresentano le variabili x^j tramite le y^j ed i parametri α^m, in forza della risolubilità del sistema 5.51 rispetto alle x^j per l'ipotesi assunta sul determinante hassiano di F:

$$x^j = \psi^j(y^k, \alpha^m) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.52$$

Allora si ha:

$$\psi^j(y^k,\alpha^m) = \frac{\partial \hat{F}}{\partial y^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{5.53}$$

dove $\hat{F}$ è la funzione così definita:

$$\hat{F}(y^j,\alpha^m) = [\sum_{j=1}^{n} x^j y^j - F(x^j,\alpha^m)]\Big|_{x^j=\psi^j(y^k,\alpha^m)} \tag{5.54}$$

Inoltre risulta:

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial \alpha^m} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha^m}\Bigg|_{x^j=\psi^j(y^k,\alpha^m)} \qquad (m = 1, 2, \ldots, r) \tag{5.55}$$

Per dimostrare la proprietà (3) dei sistemi lagrangiani non degeneri utilizzando il teorema di Donkin sopra enunciato, osserviamo innanzitutto che nel caso in esame i parametri α^m si devono identificare con le coordinate lagrangiane ed il tempo; sarà quindi $r = n+1$ e potremo assumere che $\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n$ rappresentino le coordinate lagrangiane mentre α^{n+1} rappresenti il tempo. E' poi altresì evidente che nel caso in esame le variabili x^j si devono identificare con le velocità generalizzate $\dot{q}^j$ e che le variabili y^j si devono identificare con i momenti cinetici p^j. Confrontando la 5.51 con la 5.2 si vede infine che la funzione *F* deve identificarsi con la funzione lagrangiana *L*. Ma allora la funzione $\hat{F}$ non è altro che la funzione *H* definita dalla 5.28, le 5.54 sono il primo gruppo delle 5.29 mentre le 5.55 con *m* = 1, 2, …, *n*, sono il secondo gruppo delle 5.29. Resta quindi provato che introdotta la funzione $H(q^k, p^k, t)$ definita dalle 5.5, il sistema differenziale 5.26 – 5.27 può essere scritto nella forma canonica 5.6 – 5.7. La proprietà (3) è quindi verificata. Si noti inoltre che nel caso in esame dalle 5.55 con $m = n+1$ risulta anche:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}\Bigg|_{\dot{q}^j=\psi^j(q^h,p^h,t)} \tag{5.56}$$

Questa relazione non deve stupire in quanto, come si è detto, la funzione *H* rappresenta l'energia totale del sistema. Per una interpretazione più dettagliata della 5.56 si veda l'Approccio 4 alla dimostrazione della proprietà (3).

<u>Approccio 3: uso della trasformata di Legendre</u>

Per dimostrare la proprietà (3) utilizzando la trasformata di Legendre ricordiamo innanzitutto in cosa consiste questa trasformata ed enunciamo il suo teorema fondamentale. Per maggiori dettagli sull'argomento si veda ad esempio [13], Cap. 1, § 7, pag. **1**.85 e relativa Appendice 1, pag. **1**.97.

<u>Definizione 5.1</u> Trasformata di Legendre
Sia *f* una funzione di classe C^2 di *n* variabili x^j ed *r* parametri α^m, (*j* = 1, 2, …, *n* ; *m* = 1, 2, …, *r*), avente determinante hassiano rispetto alle x^j non nullo e consideriamo il seguente sistema di *n* equazioni nelle 2*n* variabili x^j, y^j:

$$y^j - \frac{\partial f}{\partial x^j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.57$$

Si dice *trasformata di Legendre* della funzione f rispetto alle variabili x^j la funzione $\widehat{f}$ così definita:

$$\widehat{f}(y^j, \alpha^m) = [\sum_{j=1}^{n} x^j y^j - f(x^j, \alpha^m)]\Big|_{x^j = \psi^j(y^k, \alpha^m)} \qquad 5.58$$

dove con $\psi^j(y^k, \alpha^m)$ si sono indicate le funzioni che rappresentano le variabili x^j tramite le y^j ed i parametri α^m in forza della risolubilità del sistema 5.57 rispetto alle x^j per l'ipotesi assunta sul determinante hassiano di *f*.

__Teorema 5.3__ **Teorema fondamentale della rasformata di Legendre**

Sia f una funzione di classe C^2 di n variabili x^j ed r parametri α^m, (j = 1, 2, …, n ; m = 1, 2, …, r), avente determinante hassiano rispetto alle x^j non nullo e sia $\widehat{f}(y^j, \alpha^m)$ la trasformata di Legendre della funzione f rispetto alle variabili x^j:

$$\widehat{f}(y^j, \alpha^m) = [\sum_{j=1}^{n} x^j y^j - f(x^j, \alpha^m)]\Big|_{x^j = \psi^j(y^k, \alpha^m)} \qquad 5.59$$

dove con $\psi^j(y^k, \alpha^m)$ si sono indicate le funzioni che rappresentano le variabili x^j per mezzo delle y^j e dei parametri α^m, ottenute risolvendo rispetto alle x^j il seguente sistema di n equazioni nelle 2n variabili x^j, y^j:

$$y^j - \frac{\partial f}{\partial x^j} = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.60$$

Allora si ha:

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial y^j} = \psi^j(y^k, \alpha^m) \qquad ; \qquad \frac{\partial \widehat{f}}{\partial \alpha^m} = -\frac{\partial f}{\partial \alpha^m}\Big|_{x^j = \psi^j(y^k, \alpha^m)} \qquad 5.61$$

Per dimostrare la proprietà (3) dei sistemi lagrangiani non degeneri utilizzando la tecnica della trasformata di Legerndre, osserviamo innanzitutto che nel caso in esame i parametri α^m si devono identificare con le coordinate lagrangiane ed il tempo; sarà quindi $r = n+1$ e potremo assumere che $\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n$ rappresentino le coordinate lagrangiane mentre α^{n+1} rappresenti il tempo. E' poi altresì evidente che nel caso in esame le variabili x^j si devono identificare con le velocità generalizzate $\dot{q}^j$ e che le variabili y^j si devono identificare con i momenti cinetici p^j. Confrontando la 5.57 con la 5.2 si vede infine che la funzione f deve identificarsi con la funzione lagrangiana L. Ma allora la funzione $\widehat{f}$ non è altro che la funzione H definita dalla 5.28, il primo gruppo delle 5.61 è il primo gruppo delle 5.29 mentre il secondo gruppo delle 5.61 con m = 1, 2, …, n, è il secondo gruppo delle 5.29. Resta quindi provato che introdotta la funzione $H(q^k, p^k, t)$ definita dalle 5.5, il sistema differenziale 5.26 – 5.27 può essere scritto nella forma canonica 5.6 – 5.7. La proprietà (3) è quindi verificata. Si noti inoltre che nel caso in esame dal secondo gruppo delle 5.61 con $m = n+1$ risulta anche:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}\bigg|_{\dot{q}^j = \psi^j(q^h, p^h, t)} \qquad 5.62$$

Questa relazione non deve stupire in quanto, come si è detto, la funzione H rappresenta l'energia totale del sistema. Per una interpretazione più dettagliata della 5.62 si veda l'Approccio 4 alla dimostrazione della proprietà (3).

<u>Approccio 4: uso della teoria dei differenziali totali</u>

Per dimostrare la proprietà (3) utilizzando la teoria dei differenziali totali, ricordiamo innanzitutto che la funzione H definita dalla 5.5 non è altro che l'energia totale E del sistema espressa per mezzo delle variabili q^j, p^j e t. Infatti (v. anche 5.30 – 5.31):

$$E = \sum_{j=1}^{n} p^j \dot{q}^j - L(q^k, \dot{q}^k, t) \qquad 5.63$$

e quindi:

$$H = E\,\Big|_{\dot{q}^k = \psi^k(q^h, p^h, t)} \qquad 5.64$$

Differenziando E si ha:

$$dE = \sum_{j=1}^{n} p^j d\dot{q}^j + \sum_{j=1}^{n} \dot{q}^j dp^j - dL(q^k, \dot{q}^k, t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p^j d\dot{q}^j + \sum_{j=1}^{n} \dot{q}^j dp^j - \frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial q^j} dq^j - \frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial \dot{q}^j} d\dot{q}^j - \frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial t} dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} p^j d\dot{q}^j + \sum_{j=1}^{n} \dot{q}^j dp^j - \sum_{j=1}^{n} \dot{p}^j\, dq^j - \sum_{j=1}^{n} p^j\, d\dot{q}^j - \frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial t} dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \dot{q}^j dp^j - \sum_{j=1}^{n} \dot{p}^j\, dq^j - \frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial t} dt \qquad 5.65$$

Infatti, per definizione:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j} = p^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.66$$

e per le equazioni del moto 2.6:

$$\frac{\partial L}{\partial q^j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}\right) = \frac{d}{dt}(p^j) \equiv \dot{p}^j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.67$$

D'altra parte, differenziando H si ha:

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q^k} dq^k + \frac{\partial H}{\partial p^k} dp^k + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad 5.68$$

Confrontando la 5.65 con la 5.68 che rappresentano entrambe, con variabili diverse, la medesima grandezza, si ottengono allora le seguenti equazioni:

$$\dot{q}^j = \frac{\partial H}{\partial p^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.69$$

$$\dot{p}^j = -\frac{\partial H}{\partial q^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 5.70$$

e la condizione:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\left.\frac{\partial L(q^k, \dot{q}^k, t)}{\partial t}\right|_{\dot{q}^k = \psi^k(q^h, p^h, t)} \qquad 5.71$$

La proprietà (3) è quindi dimostrata. Resta inoltre chiarito appieno il significato della condizione 5.71 dalla quale segue peraltro che l'energia totale del sistema è una costante del moto se la funzione H non contiene esplicitamente il tempo (v. anche 4.53).

6. SISTEMI MECCANICI NATURALI

Si dice *sistema meccanico naturale* un sistema meccanico costituito da un numero finito punti materiali soggetti a vincoli *olonomi*, *lisci* e *bilateri*.

Come è noto, la configurazione di un tale sistema, in virtù della presenza dei vincoli che sono rappresentabili mediante un certo numero di equazioni indipendenti della forma:

$$f_a(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_r, t) = 0 \qquad (a = 1, 2, \ldots, s \quad ; \quad s < 3r) \qquad 6.1$$

dove con $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_1, ..., \mathbf{r}_r$, si sono indicati i vettori posizione dei punti materiali del sistema (supposti in tutto r), può essere descritta da un certo numero di parametri q^j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n = 3r - s$. In termini di questi parametri l'energia cinetica T del sistema risulta allora, in generale, un polinomio di secondo grado delle derivate delle q^j rispetto al tempo, la cui forma quadratica associata è definita positiva. In effetti, si può dimostrare che, in generale:

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}(q^k)\dot{q}^i \dot{q}^j + b_i(q^k)\dot{q}^i + c(q^k) \qquad 6.2$$

dove a_{ij}, b_i e c sono delle funzioni delle q^j la cui espressione dipende dai vincoli; la matrice costituita dalle funzioni a_{ij} è definita positiva. Inoltre, qualora i vincoli siano anche *scleronomi*, cioè non dipendenti dal tempo, allora l'energia cinetica del sistema assume la forma più semplice:

$$T = \frac{1}{2} a_{ij}(q^k)\dot{q}^i \dot{q}^j \qquad 6.3$$

dove le funzioni a_{ij} costituiscono sempre una matrice definita positiva.

In termini delle q^j le forze che agiscono sul sistema risultano rappresentate mediante *n* funzioni delle q^j ed, in generale, delle $\dot{q}^j$ e del tempo. Queste funzioni sono dette *forze generalizzate* e qui le indicheremo col simbolo Q^j; come si è detto, in generale:

$$Q^j = Q^j(q^k, \dot{q}^k, t) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 6.4$$

Partendo dal *principio di D'Alembert* si può allora dimostrare che se il sistema di punti materiali è soggetto a forze generalizzate Q^j di tipo *conservativo* cioè derivanti come gradiente da un *potenziale* $U = U(q^k, t)$:

$$Q^j = \frac{\partial U}{\partial q^j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 6.5$$

allora esso è un sistema lagrangiano, con lagrangiana della forma:

$$L = T + U \qquad 6.6$$

Più in generale si può poi dimostrare che un sistema meccanico naturale è un sistema lagrangiano con lagrangiana 6.6, se esso è soggetto a forze generalizzate Q^j esprimibili per mezzo di una funzione $U = U(q^k, \dot{q}^k, t)$, detta *potenziale generalizzato*, attraverso le seguenti relazioni:

$$Q^j = \frac{\partial U}{\partial q^j} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}^j}\right) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) \qquad 6.7$$

A titolo d'esempio, diciamo che rientrano nel caso ora considerato i sistemi naturali soggetti alle cosiddette *forze generalizzate giroscopiche*.

Le condizioni 6.5, o più in generale le condizioni 6.7 (che contengono le 6.5 come caso particolare), definiscono la classe dei sistemi meccanici naturali ai quali è applicabile il formalismo lagrangiano. Come si può notare, il formalismo lagrangiano non risulta applicabile a varie classi di sistemi meccanici naturali; in particolare non è applicabile ai sistemi in cui si manifestano fenomeni dissipativi. In ogni caso comunque, la lagrangiana dei sistemi meccanici naturali per i quali il formalismo è applicabile è manifestamente non degenere. Infatti il determinante hessiano di *L* coincide con quello della energia cinetica *T* (v. 6.6, 6.2 e 6.7) e quindi è senz'altro non nullo, in quanto, come si deduce dalla 6.2, il determinante hessiano di T ha per elementi le funzioni a_{ij}. Ricordiamo a tale proposito che gli autovalori di una matrice definita positiva sono tutti reali e positivi e quindi che il determinante della matrice, il cui valore coincide con il prodotto degli autovalori della matrice stessa, è senz'altro non nullo.

Per maggiori approfondimenti sui sistemi meccanici naturali e la dimostrazione di quanto ora detto, rimandiamo alla bibliografia ed in particolare a [4], [5] e [13].

BIBLIOGRAFIA GENERALE

[1] B. A. Dubrovin – S. P. Novikov – A. T. Fomento, “Geometria delle Superfici, dei Gruppi di Trasformazione e dei Campi”, Editori Riuniti.

[2] B. A. Dubrovin – S. P. Novikov – A. T. Fomento, “Geometria e Topologia delle Varietà”, Editori Riuniti.

[3] V. I. Arnold, “Metodi Matematici della Meccanica Classica”, Editori Riuniti.

[4] F. R. Gantmacher, “Lezioni di Meccanica Analitica”, Editori Riuniti.

[5] L. D. Landau – E. M. Lifsits, “Meccanica”, Editori Riuniti.

[6] P. Caldirola – R. Girelli – G. M. Prosperi, “Introduzione alla Fisica Teorica”, UTET.

[7] T. Levi-Civita, U. Amaldi, “Lezioni di Meccanica Razionale”, Vol. 1, Vol. 2 Parte I, Vol. 2 Parte II, Zanichelli.

[8] G. Agostinelli – A. Pignedoli, “Meccanica Analitica”, Accademia Nazionale di Scienze Lettere e Arti di Modena.

[9] A. Strumia, “Meccanica Razionale”, Vol. 1, Vol. 2, Edizioni Nautilus.

[10] H. Goldstein, “Classical Mechanics”, Addison – Wesley.

[11] F. Scheck, “Mechanics – From Newton’s Laws to Deterministic Chaos”, Springer – Verlag.

[12] A. A. Sokolov – I. M. Ternov – V. C. Zhukovskii – A. V. Borisov, “Quantum Electrodynamics”, Mir Publishers Moscow.

[13] A. Busato, “Introduzione alla Dinamica delle Strutture”, www.mgbstudio.net

INDICE GENERALE

1. INTRODUZIONE 1

2. DEFINIZIONE DEL FORMALISMO LAGRANGIANO 1

3. INVARIANZE INTRINSECHE DEL FORMALISMO LAGRANGIANO 3

4. IL TEOREMA DI NOETHER – LEGGI DI CONSERVAZIONE 5

5. SISTEMI LAGRANGIANI NON DEGENERI 12

6. SISTEMI MECCANICI NATURALI 23

BIBLIOGRAFIA GENERALE 25