

**M. G. BUSATO**

**SUL FRENAMENTO  
IN CONDIZIONI PURAMENTE LONGITUDINALI  
E SU STRADA PIANA E ORIZZONTALE  
DI UNA BICICLETTA**

**TEORIA BASATA SUL MODELLO RIGIDO**

**MGBSTUDIO.NET**



## SOMMARIO

*In questa memoria viene studiata la frenata di una bicicletta sotto le condizioni precisate nel titolo. In particolare viene mostrato perché, a meno di casi eccezionali (bassa aderenza del fondo stradale), il freno anteriore è notevolmente più efficace di quello posteriore e perché quando si utilizza con decisione il freno anteriore, la bicicletta, per velocità relativamente elevate, tende a ribaltarsi. Lo studio è condotto utilizzando un modello semplificato del sistema "bicicletta + ciclista" ma che consente comunque di spiegare in modo efficace la dinamica della frenata sotto le condizioni da noi considerate, ed, in particolare, i due fenomeni a cui sopra si è accennato.*



## 1. INTRODUZIONE

Il sistema “bicicletta + ciclista” è un sistema fisico notevolmente complesso la cui analisi rigorosa presenta grandi difficoltà. Per studiare la dinamica della frenata in situazioni ordinarie, cioè in condizioni puramente longitudinali su strada piana e orizzontale, non è però necessario utilizzare un modello rigoroso del sistema in esame; è sufficiente infatti supporre che il sistema sia formato da tre sottosistemi rigidi mutuamente vincolati (il telaio con solidale il ciclista, la ruota anteriore e la ruota posteriore) ed assumere che il moto avvenga esclusivamente in un piano verticale al quale siano costantemente perpendicolari gli assi di rotazione di entrambe le ruote. Queste ipotesi semplificative non inficiano infatti la validità dei risultati a cui si perviene (maggiori dettagli a tale riguardo sono riportati nella appendice di questa memoria). Assumiamo dunque che il sistema “bicicletta + ciclista”, del quale con  $G$  indicheremo il centro di massa, sia schematizzato attraverso un modello come quello rappresentato in Figura 1.1, in cui si suppone che i tre sottosistemi “telaio + ciclista”, “ruota anteriore” e “ruota posteriore”, che nel loro complesso formano il sistema completo, siano corpi rigidi.

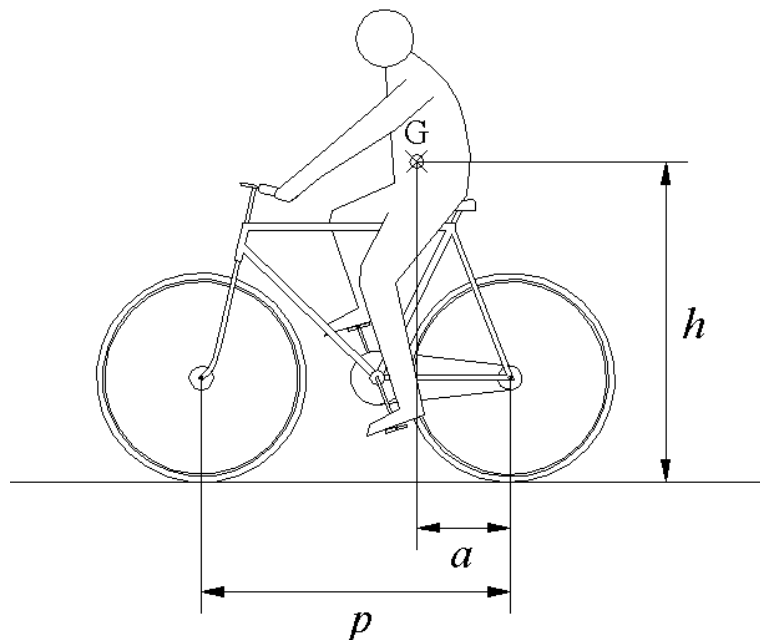


Figura 1.1

I parametri dimensionali che caratterizzano il sistema in esame (nel seguito denominati *parametri caratteristici del sistema “bicicletta + ciclista”*), sono, oltre a  $p$ ,  $a$  ed  $h$ , il cui significato è mostrato in Figura 1.1, i seguenti sei:

- $R$  il raggio delle ruote, considerate identiche.
- $m_R$  la massa di ciascuna ruota.
- $J_R$  il momento d’inerzia polare di ciascuna ruota rispetto al proprio mozzo.
- $m$  la massa totale del sistema “bicicletta + ciclista”.
- $J'_M$  il momento d’inerzia polare del sottosistema “telaio + ciclista”  $\cup$  “ruota posteriore”, rispetto al mozzo della ruota anteriore.
- $f_0$  il coefficiente di attrito radente statico fra ruote e strada.

Ricordiamo che il coefficiente di attrito radente statico  $f_0$  dipende unicamente dai materiali che costituiscono le ruote e la strada e dalle condizioni del contatto (cioè ad esempio dal fatto che la strada sia asciutta o bagnata). Esso quindi deve ritenersi un parametro noto della frenata.

Al posto della massa  $m$  è spesso più comodo considerare il peso del sistema “bicicletta + ciclista”. Esso sarà indicato con  $P$ . Si ha:

$$P = mg \tag{1.1}$$

dove  $g$  è l’accelerazione di gravità ( $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ ).

Chiaramente, tutti i parametri caratteristici del sistema “bicicletta + ciclista”, ad eccezione di  $a$ , sono necessariamente positivi. Il valore di  $a$ , infatti, dipendendo dalla distribuzione dei carichi, in linea di principio, può essere sia positivo (come nel caso di Figura 1.1), che negativo (se il centro di massa del sistema è dietro al mozzo della ruota posteriore). In questo scritto ci limiteremo tuttavia a supporre  $a$  positivo e precisamente  $0 < a < p$ . E’ questa infatti la situazione che si presenta in un normale utilizzo della bicicletta. Così, nel seguito, quando diremo che una certa circostanza è verificata “per tutti i valori dei parametri caratteristici del sistema” sottintenderemo sempre questa ipotesi su  $a$ . Quanto ai valori attribuibili ai parametri caratteristici occorre poi osservare che per quelli strutturali come  $p$ ,  $R$ ,  $m_R$  e  $J_R$  (fissi per un dato modello di bicicletta) non si ha una ampia possibilità di scelta se si vuole rimanere in un ambito realistico in quanto le biciclette sono essenzialmente standardizzate, mentre per  $a$ ,  $h$  ed  $m$  la cosa è diversa; in particolare  $a$  ed  $h$  possono addirittura essere delle variabili dinamiche (anche se noi non prenderemo in considerazione questa circostanza). Nel seguito, per gli esempi numerici, assumeremo i seguenti valori:

$$\begin{aligned} p &= 1.00 \text{ m} \\ a &= 0.33 \text{ m} \\ h &= 1.20 \text{ m} \\ R &= 0.33 \text{ m} \\ m_R &= 1.60 \text{ Kg} \\ J_R &= 0.08 \text{ Km m}^2 \\ m &= 90.0 \text{ Kg} \\ J'_M &= 1600 \text{ Km m}^2 \end{aligned}$$

e quindi, di conseguenza:

$$p - a = 0.67 \text{ m} \quad ; \quad P = 882.9 \text{ N}$$

Il coefficiente di attrito radente statico  $f_0$ , assume invece valori diversi a seconda del tipo e delle condizioni del fondo stradale: per una strada asfaltata ed in condizioni di asciutto si ha mediamente  $f_0 = 0.6$ . Il valore di  $f_0$  cala notevolmente in condizioni di bagnato.

-----

## 2. GENERALITÀ SULLA FRENATA IN CONDIZIONI DI PURO ROTO- LAMENTO

Supponiamo che la strada sia piana ed orizzontale e che il moto del sistema “bicicletta + ciclista” (schematizzato secondo il modello descritto nel paragrafo precedente) avvenga esclusivamente in un piano verticale al quale siano costantemente perpendicolari gli assi di rotazione di entrambe le ruote. Supponiamo che all’istante iniziale della frenata il moto delle ruote sia di puro rotolamento e che tale e si mantenga durante tutta la frenata ed indichiamo con:

- $V$  la velocità di avanzamento del centro di massa del sistema “bicicletta + ciclista”.
- $\omega_a$  la velocità di rotolamento della ruota anteriore.
- $\omega_p$  la velocità di rotolamento della ruota posteriore.
- $Q_a$  la reazione verticale della strada relativa alla ruota anteriore.
- $Q_p$  la reazione verticale della strada relativa alla ruota posteriore.
- $F_a$  la forza longitudinale agente sulla ruota anteriore per effetto dell’attrito radente fra ruota e strada.
- $F_p$  la forza longitudinale agente sulla ruota posteriore per effetto dell’attrito radente fra ruota e strada.
- $\Gamma_a$  la coppia frenante agente sulla ruota anteriore per effetto dell’attrito volvente.
- $\Gamma_p$  la coppia frenante agente sulla ruota posteriore per effetto dell’attrito volvente.
- $M_a$  la coppia di frenamento agente sulla ruota anteriore per effetto del sistema frenante ad essa collegato.
- $M_p$  la coppia di frenamento agente sulla ruota posteriore per effetto del sistema frenante ad essa collegato.

I valori delle grandezze sopra indicate si intendono positivi se i relativi vettori sono orientati come in Figura 2.1.

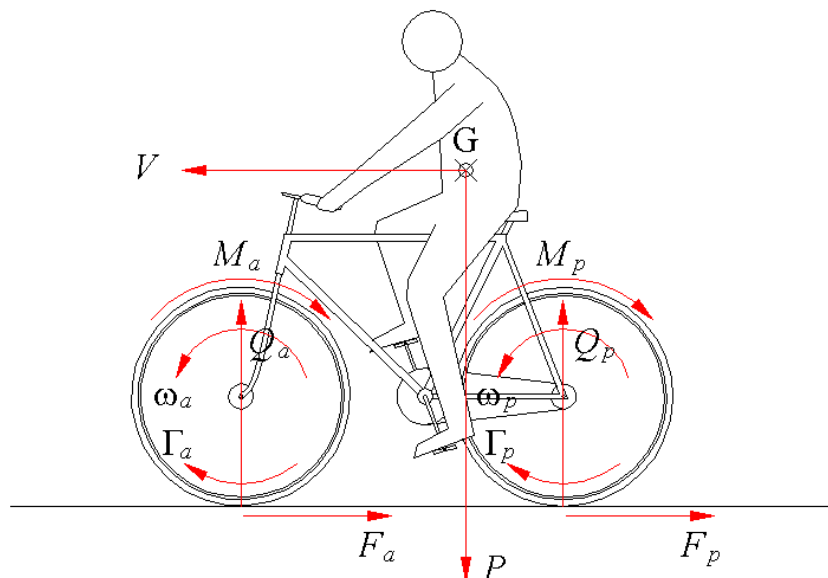


Figura 2.1

Nelle condizioni rappresentate in Figura 2.1, le equazioni che governano la “dinamica esterna” del

sistema “bicicletta + ciclista” sono le seguenti:

$$m\dot{V} = - (F_a + F_p) \quad 2.1$$

$$Q_a + Q_p = P \quad 2.2$$

$$(F_a + F_p)h - (\Gamma_a + \Gamma_p) - Q_a(p - a) + Q_p a = 0 \quad 2.3$$

A tali equazioni devono poi aggiungersi le equazioni della “dinamica interna”, che scriveremo in forma generale, anche se è evidente che nelle condizioni da noi considerate si ha  $\omega_a = \omega_p$ :

$$J_R \dot{\omega}_a = F_a R - \Gamma_a - M_a \quad 2.4$$

$$J_R \dot{\omega}_p = F_p R - \Gamma_p - M_p \quad 2.5$$

$$\omega_a R = V \quad 2.6$$

$$\omega_p R = V \quad 2.7$$

Dalle 2.2 e 2.3 si ricava:

$$Q_a = \frac{Pa - (\Gamma_a + \Gamma_p) + (F_a + F_p)h}{p} \quad 2.8$$

$$Q_p = \frac{P(p - a) + (\Gamma_a + \Gamma_p) - (F_a + F_p)h}{p} \quad 2.9$$

e da queste relazioni, tenendo conto che  $F_a + F_p > 0$ , si vede che mentre  $Q_a$  è sempre positivo, cioè rivolto come in Figura 2.1, se la forza frenante complessiva  $F_a + F_p$  è sufficientemente elevata, può invece risultare  $Q_p = 0$  e quindi annullarsi il carico sulla ruota posteriore, che di conseguenza non partecipa più al contatto con la strada e diventa un elemento interno del sistema.

Utilizzando la 2.1, dalle 2.4 ÷ 2.7 si ricava invece:

$$F_a = \frac{(mR^2 + J_R)\Gamma_a - J_R\Gamma_p}{R(mR^2 + 2J_R)} + \frac{(mR^2 + J_R)M_a - J_R M_p}{R(mR^2 + 2J_R)} \quad 2.10$$

$$F_p = \frac{(mR^2 + J_R)\Gamma_p - J_R\Gamma_a}{R(mR^2 + 2J_R)} + \frac{(mR^2 + J_R)M_p - J_R M_a}{R(mR^2 + 2J_R)} \quad 2.11$$

Le relazioni 2.10 e 2.11 ora ottenute sono la soluzione del problema della frenatura del sistema “bicicletta + ciclista” nella configurazione mostrata in Figura 2.1, a patto, ovviamente, che siano soddisfatte le ipotesi sotto le quali esse sono state ricavate e cioè che risulti  $Q_p > 0$  e che il moto di entrambe le ruote sia di puro rotolamento; solo sotto queste ipotesi infatti, le equazioni 2.4 ÷ 2.7 risul-

tano corrette. Occorre quindi associare alle 2.10 e 2.11 le relazioni che garantiscono il verificarsi delle condizioni sopra considerate e trovare le eventuali limitazioni imposte da esse ai valori di  $M_a$  ed  $M_p$ . Poiché in presenza delle coppie di frenamento  $M_a$  ed  $M_p$  l'influenza delle coppie  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_p$  è in generale trascurabile, per i nostri fini le coppie  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_p$  si possono considerare nulle e quindi assumere in luogo delle 2.8 ÷ 2.11 le relazioni seguenti, che saranno quelle alle quali nel seguito faremo sempre riferimento:

$$Q_a = \frac{Pa(mR^2 + 2J_R) + hmR(M_a + M_p)}{p(mR^2 + 2J_R)} \quad 2.12$$

$$Q_p = \frac{P(p - a)(mR^2 + 2J_R) - hmR(M_a + M_p)}{p(mR^2 + 2J_R)} \quad 2.13$$

$$F_a = \frac{(mR^2 + J_R)M_a - J_R M_p}{R(mR^2 + 2J_R)} \quad 2.14$$

$$F_p = \frac{(mR^2 + J_R)M_p - J_R M_a}{R(mR^2 + 2J_R)} \quad 2.15$$

$$F_a + F_p = \frac{mR(M_a + M_p)}{mR^2 + 2J_R} \quad 2.16$$

Come si è detto, le relazioni 2.12 ÷ 2.15 (e quindi anche la 2.16) sono valide solo se il carico sulla ruota posteriore non è nullo ed il moto di entrambe le ruote è di puro rotolamento. Deve quindi innanzitutto essere:

$$Q_p > 0 \quad 2.17$$

Devono poi essere soddisfatte le seguenti condizioni empiriche, che garantiscono rispettivamente il puro rotolamento della ruota anteriore e posteriore:

$$|F_a| \leq f_0 Q_a \quad 2.18$$

$$|F_p| \leq f_0 Q_p \quad 2.19$$

Per ricavare la condizione sotto la quale è verificata la 2.17, osserviamo che quando risulta  $Q_p = 0$ , poiché la ruota posteriore diventa un elemento interno del sistema, nella 2.13 deve porsi  $M_p = 0$  ed eseguirsi la sostituzione  $2J_R \rightarrow J_R$ . Infatti la coppia di frenamento applicata alla ruota posteriore risulta in questo caso una coppia interna del sistema ed il momento d'inerzia della ruota posteriore deve formalmente considerarsi nullo (la sostituzione  $2J_R \rightarrow J_R$  risulta evidente qualora si considerino diversi i momenti d'inerzia delle due ruote o si distinguano con un indice che precisa la ruota al

quale si riferiscono). Così facendo si ottiene allora la seguente condizione su  $M_a$  per la quale risulta verificata la disuguaglianza 2.17:

$$M_a < P \frac{p-a}{h} \frac{mR^2 + J_R}{mR} = M_{lr} \quad (\approx 164.002 \text{ N m con i nostri dati}) \quad 2.20$$

Come si vede dunque, l'annullamento del carico sulla ruota posteriore è funzione solo della coppia di frenamento agente sulla ruota anteriore. Si noti che quando  $Q_p = 0$  tutto il peso del sistema grava sulla ruota anteriore ed  $F_p = 0$ . La situazione nel caso  $Q_p = 0$  è mostrata nella Figura 2.2 qui di seguito riportata e sarà ampiamente discussa nel seguito. Quando essa si verifica si è in condizioni di ribaltamento incipiente.

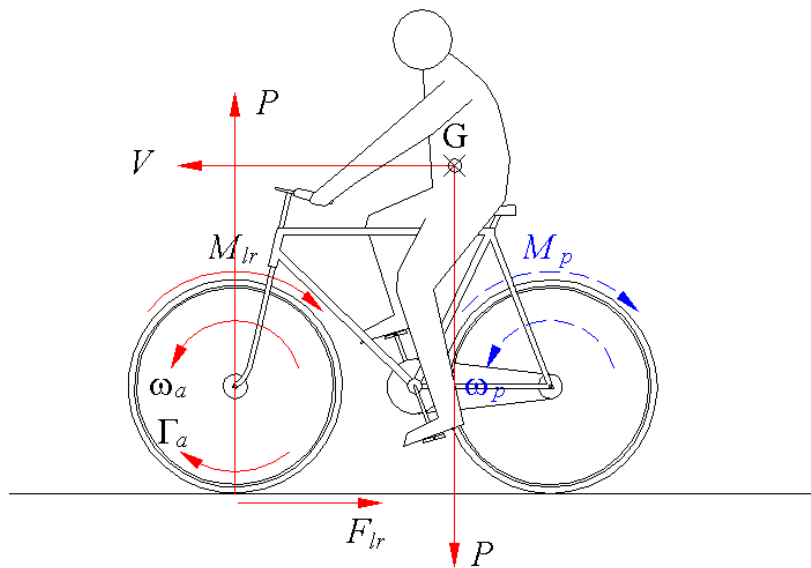


Figura 2.2

Dalle disuguaglianze 2.21 e 2.22 che garantiscono il puro rotolamento delle ruote, seguono invece rispettivamente le seguenti condizioni, valide ovviamente per  $Q_p > 0$  e quindi se  $M_a < M_{lr}$ :

$$|p(mR^2 + J_R)M_a - pJ_R M_p| \leq f_0[PRa(mR^2 + 2J_R) + hmR^2(M_a + M_p)] \quad 2.21$$

$$|p(mR^2 + J_R)M_p - pJ_R M_a| \leq f_0[PR(p-a)(mR^2 + 2J_R) - hmR^2(M_a + M_p)] \quad 2.22$$

Per assegnati valori di  $p$ ,  $a$ ,  $h$ ,  $R$ ,  $m$  e  $J_R$  le 2.20, 2.21 e 2.22 forniscono delle limitazioni alle coppie  $M_a$  ed  $M_p$  affinché la frenata avvenga nelle modalità da noi considerate. Qui non studieremo però queste condizioni generali ma ci limiteremo all'analisi di due casi estremi: quello in cui la frenatura è effettuata con il solo freno anteriore e quello invece in cui la frenatura è effettuata con il solo freno posteriore. Prima di fare questo è opportuno però osservare che mentre la forza frenante totale  $F_a + F_p$  data dalla 2.16, è sempre positiva (come deve essere), una delle forze  $F_a$  o  $F_p$  può anche essere negativa e cioè rivolta in modo opposto a come ipotizzato in Figura 2.1. Infatti dalle 2.14 e 2.15 si traggono le seguenti implicazioni:

$$F_a > 0 \quad \Rightarrow \quad M_a > \frac{J_R}{mR^2 + J_R} M_p \quad 2.23$$

$$F_p > 0 \quad \Rightarrow \quad M_a < \frac{mR^2 + J_R}{J_R} M_p \quad 2.24$$

dalle quali si deduce, essendo sia  $M_a$  che  $M_p$  per ipotesi non negativi, che le forze  $F_a$  ed  $F_p$  risultano entrambe positive solo se le coppie di frenamento soddisfano alla seguente condizione:

$$\frac{J_R}{mR^2 + J_R} M_p < M_a < \frac{mR^2 + J_R}{J_R} M_p \quad 2.25$$

Come si può notare la 2.25 non è ad esempio verificata quando la frenata è effettuata mediante l'uso del solo il freno anteriore o di quello posteriore. Questa circostanza non deve stupire in quanto, considerando ad esempio il caso della frenata mediante l'uso del solo freno anteriore, il fatto che  $F_p$  sia orientata in verso opposto a come indicato in Figura 2.1 è necessario per mantenere durante la frenata un moto di puro rotolamento della ruota posteriore.

-----

### 3. LA FRENATA IN CONDIZIONI DI PURO ROTOLAMENTO QUANDO SI USA SOLTANTO IL FRENO ANTERIORE

Consideriamo innanzitutto il caso in cui la coppia di frenamento  $M_a$  soddisfa alla condizione che garantisce il non annullamento del carico sulla ruota posteriore. Supponiamo quindi:

$$M_a < P \frac{p-a}{h} \frac{mR^2 + J_R}{mR} = M_{lr} \quad (\approx 164.002 \text{ N m con i nostri dati}) \quad 3.1$$

Allora, come abbiamo visto nel paragrafo precedente, il problema della frenatura del sistema “bicicletta + ciclista” è risolto dalle formule 2.12 ÷ 2.16, sotto le condizioni fornite dalle 2.21 e 2.22. Nel caso in esame le 2.12 ÷ 2.16 assumono la forma seguente:

$$Q_a = \frac{Pa(mR^2 + 2J_R) + hmRM_a}{p(mR^2 + 2J_R)} \quad 3.2$$

$$Q_p = \frac{P(p-a)(mR^2 + 2J_R) - hmRM_a}{p(mR^2 + 2J_R)} \quad 3.3$$

$$F_a = \frac{(mR^2 + J_R)M_a}{R(mR^2 + 2J_R)} \quad 3.4$$

$$F_p = \frac{-J_R M_a}{R(mR^2 + 2J_R)} \quad 3.5$$

$$F_a + F_p = \frac{mRM_a}{mR^2 + 2J_R} \quad 3.6$$

mentre le condizioni di compatibilità per il puro rotolamento 2.21 e 2.22 diventano rispettivamente:

$$[(p - f_0 h)mR^2 + pJ_R] M_a \leq f_0 P R a (mR^2 + 2J_R) \quad 3.7$$

$$[f_0 h m R^2 + p J_R] M_a \leq f_0 P R (p - a) (mR^2 + 2J_R) \quad 3.8$$

Essendo per ipotesi  $M_a > 0$ , la 3.7 è senz'altro verificata, qualunque sia  $M_a$ , se il coefficiente di  $M_a$  è negativo. Essa invece fornisce una effettiva limitazione al valore di  $M_a$  se il coefficiente di  $M_a$  è positivo. Poiché:

$$(p - f_0 h)mR^2 + pJ_R > 0 \Leftrightarrow f_0 < \frac{p}{h} \left( 1 + \frac{J_R}{mR^2} \right) = \bar{f}_0' \quad (\approx 0.840 \text{ con i nostri dati}) \quad 3.9$$

possiamo allora concludere che per il puro rotolamento della ruota anteriore deve essere:

$$M_a \leq f_0 \frac{P R a (mR^2 + 2J_R)}{(p - f_0 h)mR^2 + pJ_R} = M_a' \quad \text{se } f_0 \leq \bar{f}_0' \quad (f_0 \leq 0.840 \text{ con i nostri dati}) \quad 3.10$$

$$M_a = \text{qualsiasi valore} \quad \text{se } f_0 > \bar{f}_0' \quad (f_0 > 0.840 \text{ con i nostri dati}) \quad 3.11$$

Dalla 3.8 si ottiene invece, in modo diretto, che per il puro rotolamento della ruota posteriore deve essere, qualunque sia il valore di  $f_0$ :

$$M_a \leq f_0 \frac{PR(p-a)(mR^2 + 2J_R)}{f_0 hmR^2 + pJ_R} = M_a'' \quad 3.12$$

Dunque, affinché il frenamento avvenga nelle condizioni da noi considerate, deve aversi oltre alla condizione:

$$M_a < M_{lr} \quad 3.13$$

già assunta all'inizio, anche la seguente condizione, che garantisce il puro rotolamento di entrambe le ruote:

$$M_a \leq \min\{M_a', M_a''\} \quad 3.14$$

Dal confronto della 3.10 con la 3.12 si ottiene che:

$$M_a' \leq M_a'' \Leftrightarrow f_0 \leq \frac{p-a}{h} \left(1 + \frac{J_R}{mR^2}\right) - \frac{a}{h} \frac{J_R}{mR^2} = \bar{f}_0^{(c)} \quad (\approx 0.56064 \text{ con i nostri dati}) \quad 3.15$$

e poiché, come è facile provare con un calcolo diretto, è sempre, qualunque siano i valori dei parametri caratteristici del sistema "bicicletta + ciclista",  $\bar{f}_0^{(c)} < \bar{f}_0'$ , dalla 3.14 segue che affinché il moto di entrambe le ruote sia di puro rotolamento deve essere:

$$0 < M_a \leq \begin{cases} M_a' & \text{se } \bar{f}_0' < f_0 < \bar{f}_0^{(c)} \\ M_a'' & \text{se } \bar{f}_0^{(c)} < f_0 < \bar{f}_0'' \end{cases} \quad 3.16$$

Ma:

$$M_a' < M_{lr} \Leftrightarrow f_0 < \frac{p-a}{h} \frac{p \left(1 + \frac{J_R}{mR^2}\right)^2}{p \left(1 + \frac{J_R}{mR^2}\right) + a \frac{J_R}{mR^2}} = \bar{f}_0^{(r)} \quad (\approx 0.56139 \text{ con i nostri dati}) \quad 3.17$$

$$M_a'' < M_{lr} \Leftrightarrow f_0 < \frac{p}{h} \left(1 + \frac{J_R}{mR^2}\right) = \bar{f}_0' \quad 3.18$$

e come si potrebbe verificare con un calcolo diretto, qualunque siano i valori dei parametri caratteristici del sistema "bicicletta + ciclista", risulta sempre:

$$\bar{f}_0^{(c)} < \bar{f}_0^{(r)} < \bar{f}_0' \quad 3.19$$

Possiamo allora concludere che utilizzando il solo freno anteriore affinché il frenamento avvenga nelle condizioni richieste, deve essere:

$$0 < M_a \begin{cases} \leq M_a' & \text{se } 0 < f_0 < \bar{f}_0^{(c)} \\ \leq M_a'' & \text{se } \bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0' \\ < M_{lr} & \text{se } f_0 \geq \bar{f}_0' \end{cases} \quad 3.20$$

Il seguente diagramma mostra l'andamento del valore massimo utilizzabile di  $M_a$  in funzione di  $f_0$ , così come è fornito dalla 3.20.

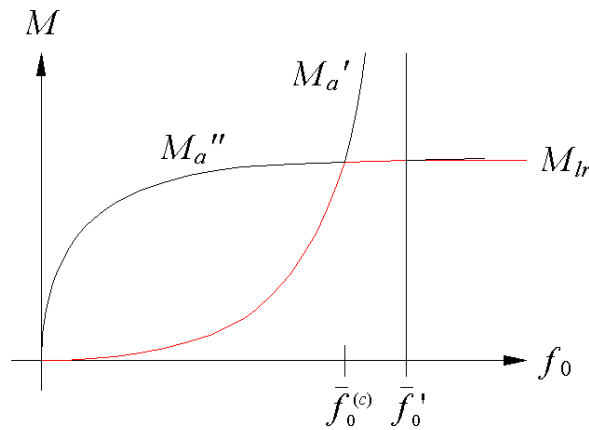


Figura 3.1

Dunque, se il fondo stradale è tale che  $f_0 > \bar{f}_0'$ , allora la massima frenata con il freno anteriore è quella che nelle condizioni da noi considerate porta al limite del ribaltamento. Ma in questa particolare circostanza tutto il carico grava sulla ruota anteriore che è l'unica a gestire la frenata. Ci si trova quindi nella situazione schematizzata nella seguente Figura 3.2.

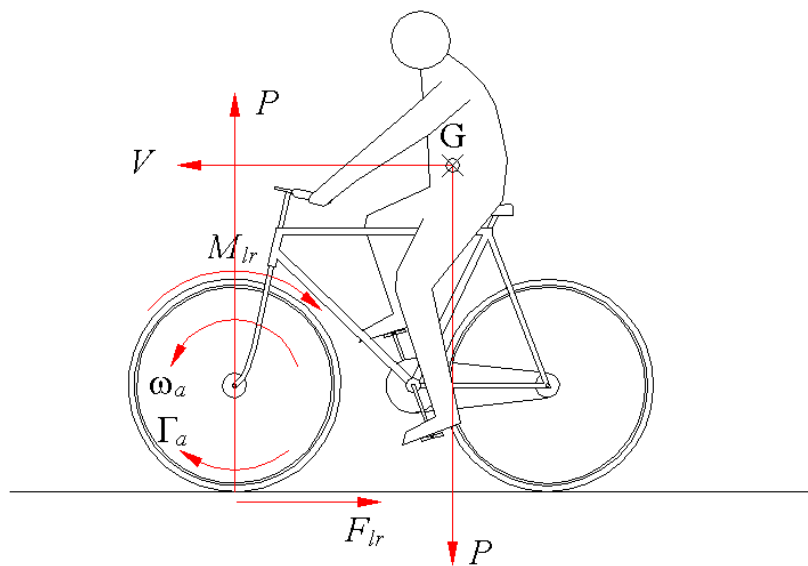


Figura 3.2

La forza frenante al limite del ribaltamento si ottiene dalla 3.4 eseguendo in essa la sostituzione formale  $2J_R \rightarrow J_R$  ed usando per  $M_a$  il valore fornito dalla 3.1 (per quanto riguarda la sostituzione formale  $2J_R \rightarrow J_R$  si ricordi quanto detto a proposito della 2.20). Si ha quindi:

$$F_{lr} = P \frac{p-a}{h} \quad 3.21$$

Si osservi anche come dal diagramma di Figura 3.1 risulti evidente che se  $f_0 < \bar{f}_0^{(c)}$  allora il frenamento con un valore di  $M_a$  superiore al limite consentito porta allo slittamento (e quasi immediato bloccaggio) della ruota anteriore, mentre se  $\bar{f}_0^{(c)} < f_0 < \bar{f}_0'$  il frenamento con un valore di  $M_a$  superiore al limite consentito porta allo slittamento della ruota posteriore. Nel primo caso si ha un sensibile peggioramento della frenata mentre nel secondo caso la situazione è più complessa. Si noti peraltro, a tale proposito, che in presenza di slittamento potrebbe non esistere un valore di  $M_a$  in corrispondenza del quale si annulli il carico sulla ruota posteriore e quindi si realizzi la condizione di ribaltamento. La condizione  $M_a < M_{lr}$  infatti è anche una conseguenza dell'ipotesi che il moto di entrambe le ruote sia di puro rotolamento (v. deduzione della 2.20). Il frenamento con slittamento del sistema "bicicletta + ciclista" nel caso di utilizzo del solo freno anteriore o del solo freno posteriore viene studiato nel paragrafo 5.

Passiamo ora a considerare il caso in cui, supponendo  $f_0 > \bar{f}_0'$ , si esegua il frenamento con un valore di  $M_a$  uguale o maggiore ad  $M_{lr}$ . Sia dunque:

$$M_a \geq P \frac{p-a}{h} \frac{mR^2 + J_R}{mR} \quad (M_a \geq 164.002 \text{ N m con i nostri dati}) \quad 3.22$$

e contemporaneamente:

$$f_0 > \bar{f}_0' \quad (f_0 \geq 0.840 \text{ con i nostri dati}) \quad 3.23$$

Quest'ultima ipotesi è necessaria per quanto detto in precedenza circa la condizione  $M_a < M_{lr}$ . Poiché nel caso ora in esame la frenata è gestita dalla sola ruota anteriore, nel seguito, per semplicità di scrittura, la coppia  $M_a$  sarà indicata con  $M$  e la forza frenante con  $F$ . Sia  $V_M$  la velocità di avanzamento della ruota anteriore (manifestamente diversa da  $V$  in condizioni di ribaltamento) e trascuriamo la coppia frenante  $\Gamma$  dovuta all'attrito volvente. Supponiamo infine che per tutto il tempo della frenata il moto della ruota sia sempre di puro rotolamento. La situazione considerata è schematizzata in Figura 3.3 a pag. 14. Nel caso in esame il frenamento del sistema "bicicletta + ciclista" è determinato dalla velocità  $V_M$  in quanto il sistema si arresta quando  $V_M = 0$ . Nelle ipotesi da noi assunte, il moto della ruota è governato dalle seguenti equazioni:

$$m\dot{V}_M = -F \quad 3.24$$

$$J_R \dot{\omega} = FR - M \quad 3.25$$

$$\omega R = V_M \quad 3.26$$

alle quali deve associarsi la condizione di puro rotolamento:

$$|F| \leq f_0 P \quad 3.27$$

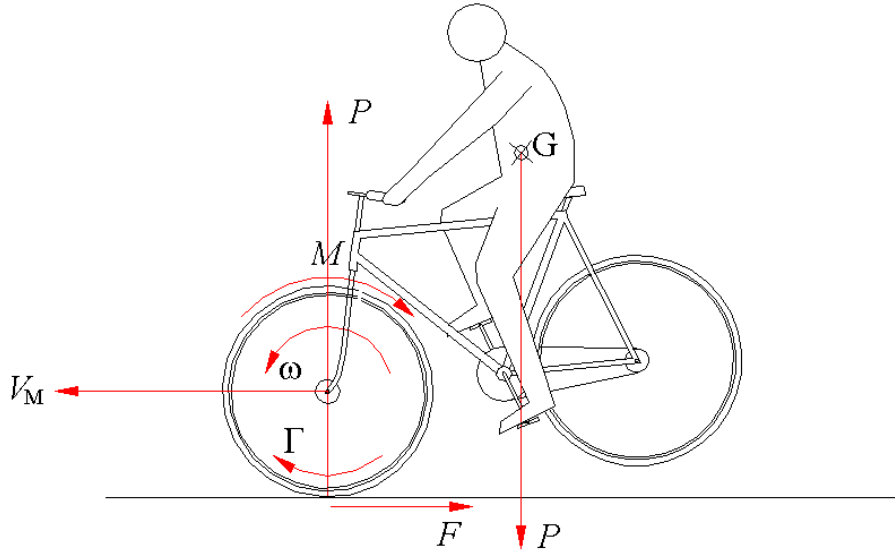


Figura 3.3

Dalle 3.24 ÷ 3.26 si trae:

$$F = \frac{mRM}{mR^2 + J_R} \quad 3.28$$

ed utilizzando questa relazione, dalla disuguaglianza 3.27 si ottiene la seguente limitazione per il momento  $M$  applicabile:

$$M \leq f_0 PR \left( 1 + \frac{J_R}{mR^2} \right) = M_{\text{Max}} \quad (M_{\text{Max}} \approx f_0 293.735 \text{ N m con i nostri dati}) \quad 3.29$$

Le relazioni ottenute sono valide purché si abbia  $M \geq M_{lr}$  ed  $f_0 > \bar{f}_0'$ , quindi occorre verificare che risulti  $M_{\text{Max}} > M_{lr}$  quando  $f_0 > \bar{f}_0'$ . Ma questo è immediato, infatti:

$$M > M_{lr} \quad \Leftrightarrow \quad f_0 > \frac{p-a}{h} \quad 3.30$$

ed in forza delle 3.15 e 3.19 risulta:

$$\frac{p-a}{h} = \bar{f}_0^{(c)} - \frac{p-2a}{h} \frac{J_R}{mR^2} < \bar{f}_0' \quad 3.31$$

Possiamo quindi concludere che la ruota anteriore mantiene un margine di puro rotolamento anche in condizioni di ribaltamento, margine il cui valore cresce al crescere di  $f_0$  come risulta evidente dal diagramma riportato in Figura 3.4, ottenuto aggiungendo al diagramma di Figura 3.1 quello del momento  $M_{\text{Max}}$  in funzione di  $f_0$ . Si noti che in condizioni di ribaltamento la ruota posteriore non partecipa al contatto e quindi il superamento da parte di  $M$  del valore limite fornito da  $M_a''$ , è irrilevante.

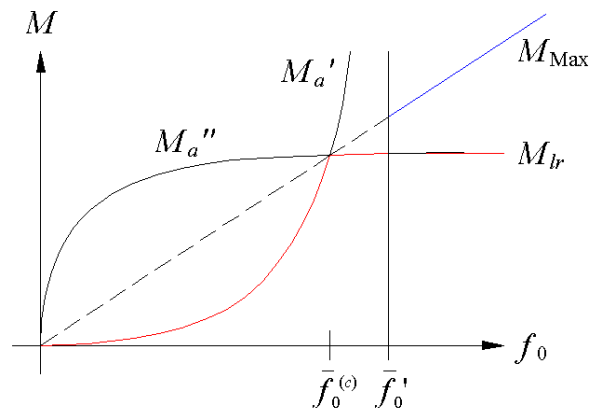


Figura 3.4

Il valore minimo di  $M_{\text{Max}} - M_{br}$  si ha per  $f_0 = \bar{f}_0'$  e risulta il seguente:

$$M_{\text{Max}}(\bar{f}_0') - M_{br} = \frac{PR}{h} \left( 1 + \frac{J_R}{mR^2} \right) \left( a + p \frac{J_R}{mR^2} \right) \quad (\approx 82.775 \text{ N m con i nostri dati}) \quad 3.32$$

Sul frenamento in condizioni di ribaltamento del sistema “bicicletta + ciclista” nel caso di utilizzo del solo freno anteriore torneremo diffusamente nel paragrafo 6.

-----

#### 4. LA FRENATA IN CONDIZIONI DI PURO ROTOLAMENTO QUANDO SI USA SOLTANTO IL FRENO POSTERIORE

Come abbiamo visto nel paragrafo 1, se il moto di entrambe le ruote è di puro rotolamento l'uso del solo freno posteriore non può mai portare all'annullamento del carico sulla ruota posteriore. Nel caso in esame quindi, la soluzione del problema della frenatura del sistema "bicicletta + ciclista" è data dalle formule 2.12 ÷ 2.16 sotto le sole condizioni fornite dalle 2.21 e 2.22. Quando si utilizza il solo freno posteriore le 2.12 ÷ 2.16 hanno la forma seguente:

$$Q_a = \frac{Pa(mR^2 + 2J_R) + hmRM_p}{p(mR^2 + 2J_R)} \quad 4.1$$

$$Q_p = \frac{P(p-a)(mR^2 + 2J_R) - hmRM_p}{p(mR^2 + 2J_R)} \quad 4.2$$

$$F_a = \frac{-J_R M_p}{R(mR^2 + 2J_R)} \quad 4.3$$

$$F_p = \frac{(mR^2 + J_R) M_p}{R(mR^2 + 2J_R)} \quad 4.4$$

$$F_a + F_p = \frac{mR M_p}{mR^2 + 2J_R} \quad 4.5$$

mentre le condizioni di compatibilità per il puro rotolamento 2.21 e 2.22 diventano rispettivamente:

$$(pJ_R - f_0 hmR^2) M_p \leq f_0 PRa(mR^2 + 2J_R) \quad 4.6$$

$$[p(mR^2 + J_R) + f_0 hmR^2] M_p \leq f_0 PR(p-a)(mR^2 + 2J_R) \quad 4.7$$

Essendo per ipotesi  $M_p > 0$ , la 4.6 è senz'altro verificata, qualunque sia  $M_p$ , se il coefficiente di  $M_p$  è negativo. Essa invece fornisce una effettiva limitazione al valore di  $M_p$  se il coefficiente di  $M_p$  è positivo. Poiché:

$$pJ_R - f_0 hmR^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad f_0 < \frac{p}{h} \frac{J_R}{mR^2} = \tilde{f}_0' \quad (\approx 0.00680 \text{ con i nostri dati}) \quad 4.8$$

possiamo allora concludere che per il puro rotolamento della ruota anteriore deve essere:

$$M_p \leq f_0 \frac{PRa(mR^2 + 2J_R)}{pJ_R - f_0 hmR^2} = M_p' \quad \text{se } f_0 \leq \tilde{f}_0' \quad (f_0 \leq 0.00680 \text{ con i nostri dati}) \quad 4.9$$

$$M_p = \text{qualsiasi valore} \quad \text{se } f_0 > \tilde{f}_0' \quad (f_0 > 0.00680 \text{ con i nostri dati}) \quad 4.10$$

Dalla 4.7 si ottiene invece, in modo diretto, che per il puro rotolamento della ruota posteriore deve essere, qualunque sia il valore di  $f_0$  :

$$M_p \leq f_0 \frac{PR(p-a)(mR^2 + 2J_R)}{p(mR^2 + J_R) + f_0 hmR^2} = M_p'' \quad 4.11$$

Dunque, affinché il frenamento avvenga nelle condizioni da noi considerate, cioè con moto di puro rotolamento per entrambe le ruote (come si è detto all'inizio, il non annullamento del carico sulla ruota posteriore è garantito in modo automatico), deve aversi:

$$M_p \leq \min\{M_p', M_p''\} \quad 4.12$$

Dal confronto della 4.9 con la 4.11 si ottiene che:

$$M_p' < M_p'' \Leftrightarrow f_0 < \frac{p}{h} \frac{J_R}{mR^2} - \frac{a}{h} \left(1 + 2 \frac{J_R}{mR^2}\right) \quad 4.13$$

Ma  $f_0$  deve essere positivo, e ciò implica la seguente condizione sui parametri caratteristici del sistema "bicicletta + ciclista":

$$\frac{a}{p} < \frac{J_R}{mR^2 + 2J_R} \quad (\approx 0.00803 \text{ con i nostri dati}) \quad 4.14$$

La 4.14 non può mai essere soddisfatta nelle situazioni di utilizzo normale di una bicicletta; occorrerebbe infatti che il centro di massa del sistema "bicicletta + ciclista" fosse praticamente sopra il mozzo della ruota posteriore. In ogni caso poi per i valori di  $f_0$  in corrispondenza dei quali, conformemente alla 4.13, risulta  $M_p' < M_p''$ , la bicicletta, stante la loro piccolezza, non sarebbe neppure guidabile. Possiamo perciò concludere che il frenamento del sistema "bicicletta + ciclista" può avvenire nelle modalità da noi supposte solo se la coppia  $M_p$  soddisfa alla seguente condizione, valida per ogni valore di  $f_0$  :

$$0 < M_p \leq M_p'' \quad 4.15$$

L'andamento del valore massimo utilizzabile di  $M_p$  in funzione di  $f_0$ , stabilito dalla 4.15, è mostrato dal diagramma riportato in Figura 4.1.

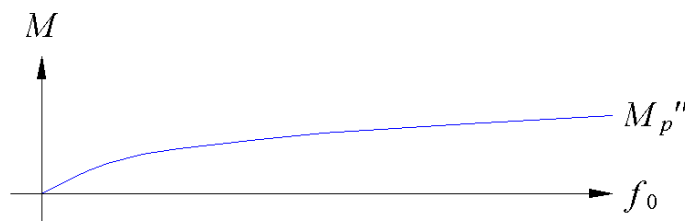


Figura 4.1

Dal diagramma di Figura 4.1 si può anche vedere come un aumento del valore di  $M_p$  oltre al limite consentito dalla 4.15 porti necessariamente allo slittamento (e quasi immediato bloccaggio) della ruota posteriore con conseguente peggioramento della frenata. Su questo punto torneremo più diffusamente nel prossimo paragrafo.

E' utile ora confrontare, nelle condizioni qui considerate, il frenamento ottenuto con l'uso del solo freno posteriore rispetto a quello ottenuto con l'uso del solo freno anteriore (studiato nel paragrafo precedente). In entrambi i casi la forza frenante complessiva  $F_{tot} = F_a + F_p$ , che determina il tempo di frenata e quindi l'efficienza della frenata stessa, è data dalla formula (v. 3.6 e 4.5):

$$F_{tot} = \frac{mR}{mR^2 + 2J_R} M \quad 4.16$$

dove con  $M$  si è indicata la coppia di frenamento applicata:  $M = M_a$  se il frenamento è eseguito con l'uso del solo freno anteriore, mentre  $M = M_p$  se il frenamento è eseguito con l'uso del solo freno posteriore. Ricordando le limitazioni al valore di  $M$  fornite rispettivamente dalla 3.20 nel caso  $M = M_a$  e dalla 4.15 nel caso  $M = M_p$ , al fine di verificare quale frenamento è potenzialmente più efficace in relazione alle condizioni del fondo stradale, basta allora verificare se esistono dei valori del coefficiente di attrito radente statico  $f_0$  in corrispondenza dei quali si abbia:

$$M_a' < M_p'' \quad \text{quando} \quad 0 < f_0 < \bar{f}_0^{(c)} \quad 4.17$$

$$M_a'' < M_p'' \quad \text{quando} \quad \bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0' \quad 4.18$$

$$M_{lr} < M_p'' \quad \text{quando} \quad f_0 \geq \bar{f}_0' \quad 4.19$$

Ma come si potrebbe facilmente dimostrare con un calcolo diretto:

$$M_a' < M_p'' \Leftrightarrow f_0 < \frac{p-2a}{h} \left( 1 + \frac{J_R}{mR^2} \right) = f_0^{(t)} \quad (\approx 0.2856 \text{ con i nostri dati}) \quad 4.20$$

$$M_a'' < M_p'' \quad \text{mai} \quad 4.21$$

$$M_{lr} < M_p'' \Leftrightarrow f_0 < \frac{p}{h} \frac{(mR^2 + J_R)^2}{J_R mR^2} = f_0^{(s)} \quad (\approx 103.767 \text{ con i nostri dati}) \quad 4.22$$

La 4.20 è accettabile purché sia  $a < p/2$ , condizione questa che tranne in casi eccezionali si può sempre ritenere verificata, e poiché sotto questa ipotesi si ha, qualunque siano i valori dei parametri caratteristici del sistema "bicicletta + ciclista",  $f_0^{(t)} < \bar{f}_0^{(c)}$ , mentre  $f_0^{(s)}$  è un valore non fisicamente accettabile, possiamo concludere che se il fondo stradale è tale che  $f_0 < f_0^{(t)}$  (bassa aderenza) il frenamento con il solo freno posteriore è potenzialmente più efficace di quello con il solo freno anteriore, mentre se  $f_0 \geq f_0^{(t)}$  è vero il contrario. Naturalmente, se  $p/2 \leq a < p$  allora il frenamento potenzialmente più efficace è sempre quello eseguito con il solo freno anteriore. Quanto ora detto è

mostrato dal diagramma di Figura 4.2, in cui sono riportati, sovrapposti, i diagrammi di Figura 3.1 e Figura 4.1 relativi a medesimi valori dei parametri caratteristici del sistema “bicicletta + ciclista” (si suppone  $a < p/2$ ).

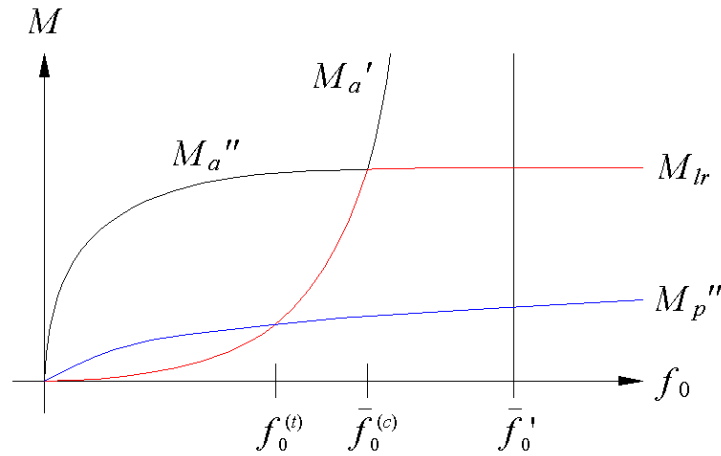


Figura 4.2

Come si vede, il guadagno che si può ottenere con l’uso del solo freno posteriore quando  $f_0 < f_0^{(t)}$  è comunque scarso. Rilevante è invece il guadagno che si ottiene con l’uso del solo freno anteriore in condizioni di buona aderenza. Si tenga però presente che in questo caso può verificarsi il problema del ribaltamento. La differenza fra i valori massimi utilizzabili nelle condizioni da noi considerate delle coppie di frenamento  $M_a$  ed  $M_p$ , è riportata, in funzione di  $f_0$ , nel diagramma di Figura 4.3 (in cui i citati valori massimi di  $M_a$  ed  $M_p$ , forniti rispettivamente dalla 3.20 e 4.15, sono stati indicati con  $\bar{M}_a$  ed  $\bar{M}_p$ ).

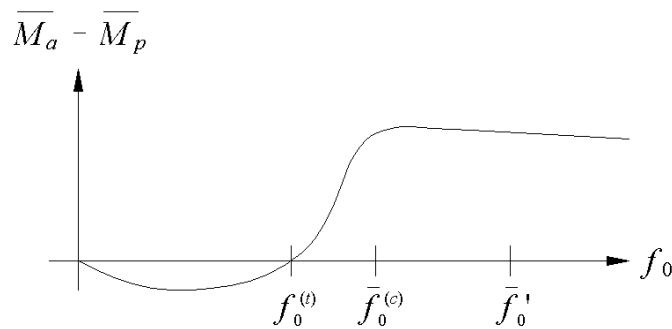


Figura 4.3

Come si può notare, il massimo di guadagno potenziale si ha per un valore di  $f_0$  prossimo a  $f_0^{(c)}$  (valore che con i nostri dati è di circa 0.6). Chiaramente, differenti valori dei parametri caratteristici del sistema “bicicletta + ciclista” possono cambiare la situazione. In particolare si noti la dipendenza di tutti i risultati ottenuti da  $a$  e da  $h$  che in larga misura dipendono dalla postura assunta del ciclista.

## 5. CENNI SULLA LA FRENATA IN PRESENZA DI SLITTAMENTO DI UNA RUOTA QUANDO SI USA SOLTANTO IL FRENO ANTERIORE O IL FRENO POSTERIORE

Quando il contatto di una ruota con il fondo stradale avviene in condizioni di slittamento, l'interazione longitudinale della ruota con il fondo stradale è caratterizzata dall'attrito radente dinamico. Per fissare le idee, consideriamo la situazione mostrata in Figura 5.1 in cui si suppone che una ruota la cui velocità di avanzamento è  $V$ , abbia una velocità di rotolamento  $\omega$  minore di quella necessaria per il puro rotolamento, per cui il punto di contatto con la strada presenta, rispetto a questa, una velocità di slittamento  $v$  orientata nella direzione di avanzamento della ruota stessa.

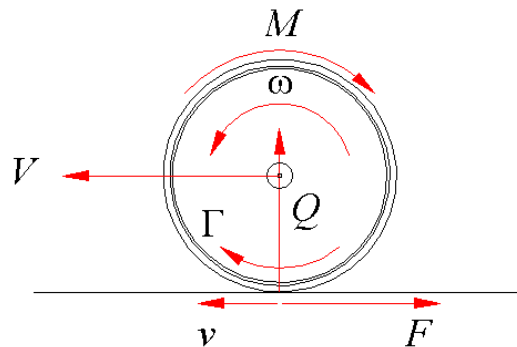


Figura 5.1

Allora, supponendo che i valori di  $V$ ,  $\omega$  e  $v$  siano positivi se i relativi vettori sono orientati come in figura ed indicando con  $R$  il raggio della ruota, si ha la relazione:

$$\omega R + v = V \quad 5.1$$

mentre l'interazione longitudinale fra la ruota e la strada è rappresentata da una forza la cui direzione è opposta a quella della velocità di slittamento e la cui intensità è definita dalla seguente formula empirica:

$$F = f(v)Q \quad 5.2$$

dove  $f$  è il coefficiente di attrito radente dinamico che, come si è messo in evidenza, dipende dal valore della velocità di slittamento, e  $Q$  è la reazione verticale che la strada esercita sulla ruota.

Sperimentalmente si trova che la dipendenza del coefficiente  $f$  dal valore  $v$  è del tipo mostrato nel diagramma di Figura 5.2 e che il suo valore, come si vede peraltro dalla stessa Figura 5.1, è sempre alquanto minore di quello del coefficiente di attrito radente statico  $f_0$  del fondo stradale su cui si considera che avvenga il moto. Sussiste quindi la limitazione:

$$f(v) < f_0 \quad 5.3$$

Nel seguito vedremo come la 5.3 comporti una notevole riduzione dell'efficacia del frenamento in condizioni di slittamento della ruota frenata (cioè della ruota anteriore se si usa il freno anteriore o della ruota posteriore se si usa il freno posteriore).

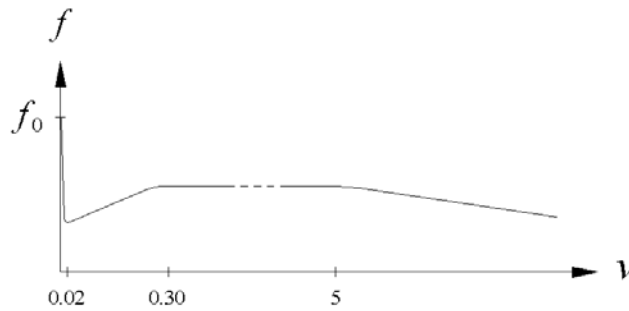


Figura 5.2

Ciò premesso, in quanto paragrafo discuteremo brevemente i seguenti tre casi di frenamento in condizioni di slittamento di una ruota del sistema “bicicletta + ciclista” :

- Frenamento in condizioni di slittamento della ruota anteriore, quando per frenare si utilizza il solo freno anteriore.
- Frenamento in condizioni di slittamento della ruota posteriore, quando per frenare si utilizza il solo freno anteriore.
- Frenamento in condizioni di slittamento della ruota posteriore quando, per frenare si utilizza il solo freno posteriore.

**Frenamento in condizioni di slittamento della ruota anteriore quando per frenare si utilizza il solo freno anteriore.**

Questa situazione si presenta quando il coefficiente di attrito radente statico del fondo stradale soddisfa la condizione  $f_0 < \bar{f}_0^{(c)}$  ed alla ruota anteriore viene applicata una coppia di frenamento  $M_a > M_a'$  (si veda a tale proposito il diagramma di Figura 3.1). Nel caso in esame, ed in generale in tutti i casi in cui è presente lo slittamento, la direzione delle forze  $F_a$  ed  $F_p$  non è ottenuta in modo automatico risolvendo le equazioni della dinamica del sistema; occorre infatti predeterminare la direzione della forza relativa alla ruota slittante, cioè la direzione della forza  $F_a$  per la situazione qui considerata. Osserviamo allora, a tale proposito, che nel caso ora in esame lo slittamento della ruota anteriore deriva dal fatto che la coppia di frenamento applicata non può più essere opportunamente contrastata dalla coppia generata dalla forza  $F_a$  il cui valore, per fare ciò, dovrebbe essere maggiore di  $f_0 Q_a$ . Ne segue che la velocità di rotolamento della ruota anteriore risulta minore di quella necessaria per il puro rotolamento e che, di conseguenza, la velocità di slittamento sarà orientata nella direzione di avanzamento (come nel caso della ruota di Figura 5.1). La forza  $F_a$  sarà perciò orientata in verso opposto a quello di avanzamento e quindi sarà una forza frenante per il sistema. Usando le nostre solite convenzioni sulla direzione delle forze e delle velocità (quelle stabilite in Figura 2.1 e riportate per il caso in esame in Figura 5.3) dovremo quindi considerare  $F_a$  positiva e di conseguenza, conformemente alla 5.2, assumere:

$$F_a = f(v_a)Q_a \tag{5.4}$$

Una volta caratterizzata la forza  $F_a$ , la direzione della forza  $F_p$  risulta determinata direttamente dalle equazioni della dinamica del sistema. E' evidente comunque che nel caso ora in esame essa sarà orientata nella direzione di avanzamento, in quanto, avendo noi supposto che il moto della ruota posteriore sia di puro rotolamento, la forza  $F_p$  deve generare una coppia frenante per la ruota postero-

re (chiaramente l'ipotesi di puro rotolamento della ruota posteriore dovrà poi essere verificata a risultati ottenuti). Utilizzando le convenzioni di Figura 5.3, il valore di  $F_p$  risulterà quindi negativo.

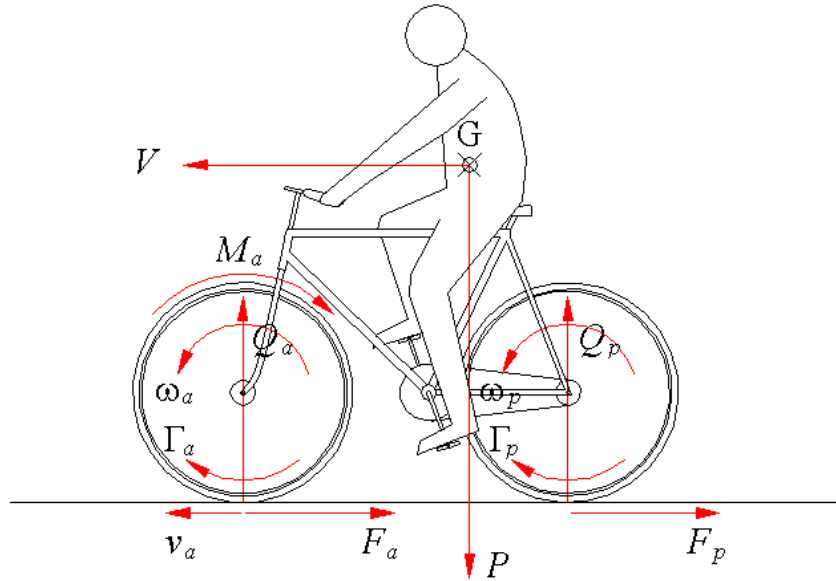


Figura 5.3

Riferendosi alla Figura 5.3 e trascurando le coppie  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_p$ , le equazioni della dinamica del sistema “bicicletta + ciclista” sono le seguenti (per  $F_a$  si è usata la sua espressione fornita dalla 5.4):

$$m\dot{V} = -f(v_a)Q_a - F_p \quad 5.5$$

$$Q_a + Q_p = P \quad 5.6$$

$$(f(v_a)Q_a + F_p)h + Q_p a - Q_a(p - a) = 0 \quad 5.7$$

$$J_R \dot{\omega}_a = f(v_a)Q_a R - M_a \quad 5.8$$

$$J_R \dot{\omega}_p = F_p R \quad 5.9$$

$$\omega_a R + v_a = V \quad 5.10$$

$$\omega_p R = V \quad 5.11$$

e da queste relazioni si traggono dopo alcuni passaggi, le seguenti espressioni per  $Q_a, Q_p, F_a, F_p, F_a + F_p$ :

$$Q_a = \frac{Pa(mR^2 + J_R)}{(p - f(v_a)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.12$$

$$Q_p = \frac{P[(p-a)(mR^2 + J_R) - f(v_a)hmR^2]}{(p - f(v_a)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.13$$

$$F_a = f(v_a) \frac{Pa(mR^2 + J_R)}{(p - f(v_a)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.14$$

$$F_p = -f(v_a) \frac{PaJ_R}{(p - f(v_a)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.15$$

$$F_a + F_p = f(v_a) \frac{PamR^2}{(p - f(v_a)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.16$$

ed il seguente sistema differenziale, che governa il moto del sistema “bicicletta + ciclista” durante il frenamento:

$$m\dot{V} = -\frac{f(v_a)PamR^2}{(p - f(v_a)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.17$$

$$J_R\dot{\omega}_a = \frac{f(v_a)PRa(mR^2 + J_R)}{(p - f(v_a)h)mR^2 + pJ_R} - M_a \quad 5.18$$

in cui occorre considerare:

$$v_a = V - \omega_a R \quad 5.19$$

Ricordiamo che nelle precedenti relazioni deve sempre supporre:

$$M_a > M_a' = f_0 \frac{PRa(mR^2 + 2J_R)}{(p - f_0 h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.20$$

nonché  $f_0 < \bar{f}_0^{(c)}$ .

Come si può notare, nella forza frenante complessiva  $F_a + F_p$  non compare il valore di  $M_a$ . Questo può apparire strano invece non è così. Infatti la dipendenza da  $M_a$  avviene tramite il coefficiente  $f$  che è una funzione della velocità di slittamento, a suo volta funzione del valore di  $M_a$  (v. 5.17 ÷ 5.19). E' da osservare comunque a tale riguardo che integrando numericamente il sistema differenziale 5.17 ÷ 5.19 (per una assegnata funzione  $f(v_a)$ ) risulta che dopo pochissimi istanti la ruota anteriore si blocca e quindi, coincidendo da questo istante in poi la velocità di slittamento con la velocità di avanzamento, il frenamento risulta governato dalla sola seguente equazione differenziale, realmente indipendente da  $M_a$ :

$$m\dot{V} = -\frac{f(V)PamR^2}{(p - f(V)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.21$$

Anche questo non deve stupire in quanto a ruota bloccata la coppia  $M_a$  è una azione interna del sistema.

Per confrontare l'efficacia della frenata nel caso in esame rispetto a quello analogo in cui entrambe le ruote hanno un moto di puro rotolamento (caso studiato nel paragrafo 3), calcoliamo la relazione 3.6 per  $M_a = M_a'$ . Si ha:

$$F_a + F_p = f_0 \frac{PamR^2}{(p - f_0 h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.22$$

Questo, come è noto, è il massimo valore raggiungibile dalla forza frenante in condizioni di puro rotolamento per entrambe le ruote quando  $f_0 < \bar{f}_0^{(c)}$  e per frenare si utilizza il solo freno anteriore. Confrontando la 5.22 con la 5.16 si vede che il virtù della limitazione 5.3, la forza frenante in presenza di slittamento della ruota anteriore (cioè, ricordiamo, della ruota frenata) è sempre minore (spesso molto minore) di quella in condizioni di puro rotolamento di entrambe le ruote. La situazione è particolarmente critica se  $V$  è relativamente elevata in quanto, come si vede dal diagramma di Figura 5.2, in tali condizioni il valore di  $f$  è alquanto basso. A questo deve poi aggiungersi il fatto che l'azione del freno, efficace solo nel brevissimo periodo di tempo precedente al bloccaggio della ruota anteriore, non è in grado di realizzare un consistente calo di velocità prima del bloccaggio della ruota stessa. Di questo fatto ci si può rendere formalmente conto integrando il sistema differenziale 5.17 ÷ 5.19, supponendo, per semplicità,  $f$  costante. Questa analisi noi non la faremo, ma in Figura 5.4 n'è mostrato qualitativamente il risultato. Come si può notare il tempo di arresto aumenta considerevolmente in presenza di slittamento.

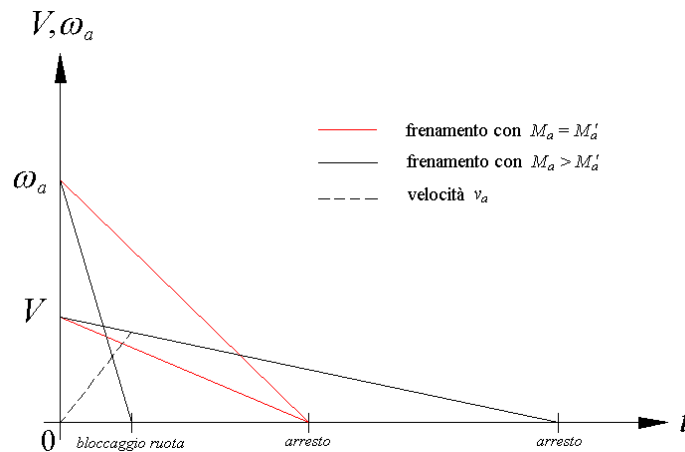


Figura 5.4

Quanto finora detto presuppone ovviamente che le ipotesi assunte per dedurre le 5.12 ÷ 5.18 siano verificate. Vediamo ora se questo è sempre vero o se esistono delle condizioni supplementari. Affinché le 5.12 ÷ 5.18 siano corrette occorre innanzitutto che il denominatore di queste espressioni sia positivo:

$$(p - f(v_a)h)mR^2 + pJ_R > 0 \quad 5.23$$

Devono inoltre essere contemporaneamente soddisfatte le seguenti due condizioni:

$$Q_p > 0 \quad 5.24$$

$$|F_p| \leq f_0 Q_p \quad 5.25$$

Si ha (cfr. 3.9):

$$(p - f(v_a)h)mR^2 + pJ_R > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(v_a) < \frac{p}{h} \left( 1 + \frac{J_R}{mR^2} \right) = \bar{f}_0' \quad 5.26$$

mentre, supponendo verificata la condizione 5.23, risulta (cfr. 3.15):

$$Q_p > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(v_a) < \frac{p-a}{h} \left( 1 + \frac{J_R}{mR^2} \right) = \bar{f}_0^{(c)} + \frac{a}{h} \frac{J_R}{mR^2} \quad 5.27$$

$$|F_p| \leq f_0 Q_p \quad \Leftrightarrow \quad f(v_a) < f_0 \frac{(p-a)(mR^2 + J_R)}{f_0 h m R^2 + a J_R} = f_0 \frac{\bar{f}_0^{(c)} h m R^2 + a J_R}{f_0 h m R^2 + a J_R} \quad 5.28$$

Ma poiché  $f(v_a) < \bar{f}_0'$  e supponiamo  $f_0 < \bar{f}_0^{(c)}$ , tutte le precedenti relazioni sono sempre verificate, qualunque siano i valori dei parametri caratteristici del sistema “bicicletta + ciclista”. I risultati ottenuti e le conseguenze discusse valgono quindi in generale, senza alcuna condizione aggiuntiva. In particolare si noti che dalla 5.24 segue che nel caso ora in esame non è possibile giungere al ribaltamento del sistema “bicicletta + ciclista”.

### **Frenamento in condizioni di slittamento della ruota posteriore quando per frenare si utilizza il solo freno anteriore.**

Questa situazione si presenta quando il coefficiente di attrito radente statico del fondo stradale soddisfa la condizione  $\bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0'$  ed alla ruota anteriore viene applicata una coppia di frenamento  $M_a > M_a''$  (si veda a tale proposito il diagramma di Figura 3.1). Anche nel caso in esame, esattamente come in quello precedente, occorre predeterminare la direzione della forza di interazione longitudinale fra la strada e la ruota slittante, cioè, nella situazione attuale, la direzione della forza  $F_p$ . Quando per frenare viene utilizzato, come noi qui supponiamo, il solo freno anteriore, lo slittamento della ruota posteriore deriva dal fatto che essa non è sufficientemente rallentata dalla coppia dovuta alla forza  $F_p$ , il cui valore, per fare ciò, dovrebbe essere maggiore di  $f_0 Q_p$ . Ne segue che la velocità di rotolamento della ruota posteriore risulta maggiore di quella utile per il puro rotolamento e che, di conseguenza, la velocità di slittamento sarà orientata in direzione opposta a quella di avanzamento (in direzione opposta a come mostrato in Figura 5.1). La forza  $F_p$  avrà perciò verso concorde a quello di avanzamento e quindi sarà una forza accelerante per il sistema. Usando le nostre solite convenzioni sulla direzione delle forze  $F_a$  ed  $F_p$  (quelle stabilite in Figura 2.1 e riportate per il caso in esame in Figura 5.5), dovremo quindi considerare  $F_p$  negativa e di conseguenza, conformemente alla 5.2, assumere:

$$F_p = -f(v_p)Q_p \quad 5.28$$

Usando le convenzioni di Figura 5.5 il valore di  $v_p$  deve invece ritenersi positivo, perché la veloci-

tà di slittamento è orientata in modo corretto. Una volta caratterizzata la forza  $F_p$ , la direzione della forza  $F_a$  risulta determinata direttamente dalle equazioni della dinamica del sistema. E' evidente comunque che essa sarà una forza frenante; utilizzando le convenzioni di Figura 5.5, il valore di  $F_a$  risulterà quindi positivo.

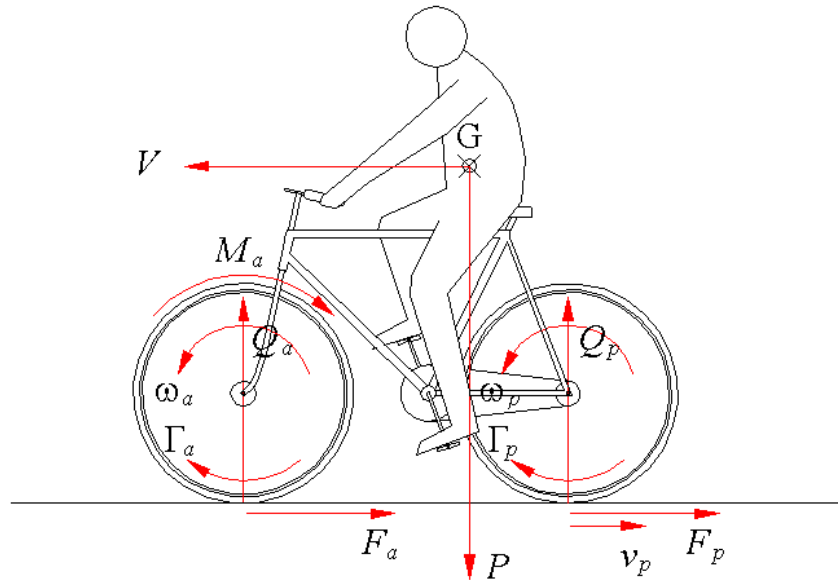


Figura 5.5

Riferendosi alla Figura 5.5 e trascurando le coppie  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_p$ , le equazioni della dinamica del sistema "bicicletta + ciclista" sono le seguenti (per  $F_p$  si è usata la sua espressione fornita dalla 5.28):

$$m\dot{V} = -F_a + f(v_p)Q_p \quad 5.29$$

$$Q_a + Q_p = P \quad 5.30$$

$$(F_a - f(v_p)Q_p)h + Q_p a - Q_a(p - a) = 0 \quad 5.31$$

$$J_R \dot{\omega}_a = F_a R - M_a \quad 5.32$$

$$J_R \dot{\omega}_p = -f(v_p)Q_p R \quad 5.33$$

$$\omega_a R = V \quad 5.34$$

$$\omega_p R - v_p = V \quad 5.35$$

e da queste relazioni si traggono dopo alcuni passaggi, le seguenti espressioni per  $Q_a, Q_p, F_a, F_p, F_a + F_p$ :

$$Q_a = \frac{P[(a - f(v_p)h)mR^2 + aJ_R] + hmRM_a}{(p - f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.36$$

$$Q_p = \frac{P(p - a)(mR^2 + J_R) - hmRM_a}{(p - f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.37$$

$$F_a = \frac{f(v_p)P(p - a)J_R + (p - f(v_p)h)mRM_a}{(p - f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.38$$

$$F_p = -f(v_p) \frac{P(p - a)(mR^2 + J_R) - hmRM_a}{(p - f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.39$$

$$F_a + F_p = \frac{-f(v_p)P(p - a)mR^2 + pmRM_a}{(p - f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.40$$

ed il seguente sistema differenziale, che governa il moto del sistema “bicicletta + ciclista” durante il frenamento:

$$m\dot{V} = \frac{f(v_p)P(p - a)mR^2 - pmRM_a}{(p - f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.41$$

$$J_R\dot{\omega}_p = -f(v_p) \frac{PR(p - a)(mR^2 + J_R) - hmR^2M_a}{(p - f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.42$$

Nelle 5.41 e 5.42 occorre considerare:

$$v_p = \omega_p R - V \quad 5.43$$

Ricordiamo inoltre che nelle precedenti relazioni deve sempre supporre:

$$M_a > M_a'' = f_0 \frac{PR(p - a)(mR^2 + 2J_R)}{f_0 hmR^2 + pJ_R} \quad 5.44$$

nonché  $\bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0'$ .

Quanto finora detto presuppone ovviamente che le ipotesi assunte per dedurre le 5.36 ÷ 5.42 siano verificate. Vediamo ora se questo è sempre vero o se esistono delle condizioni supplementari. Affinché le 5.36 ÷ 5.42 siano corrette occorre innanzitutto che per  $M_a > M_a''$  ed  $\bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0'$ , risulti:

$$Q_a > 0 \quad 5.45$$

$$Q_p > 0 \quad 5.46$$

$$F_a > 0 \quad 5.47$$

$$F_a + F_p > 0 \quad 5.48$$

Deve inoltre essere contemporaneamente soddisfatta la seguente condizioni:

$$|F_a| \leq f_0 Q_a \quad 5.49$$

Lo studio delle limitazioni 5.45 ÷ 5.49 è cosa alquanto laboriosa, ma vale la pena affrontarlo poiché da esse si trae una conclusione importante, cioè che il problema del ribaltamento per il sistema “bicicletta + ciclista” si presenta già a cominciare da  $f_0 > \bar{f}_0^{(c)}$  (con conseguenze anche peggiori di quanto non avvenga per  $f_0 > \bar{f}_0'$ ).

Innanzitutto, al fine di agevolare lo studio delle 5.45 ÷ 5.49, osserviamo che:

$$(p - f(v_p)h)mR^2 + pJ_R > 0 \quad \Leftrightarrow \quad f(v_p) < \frac{p}{h} \left( 1 + \frac{J_R}{mR^2} \right) = \bar{f}_0' \quad 5.50$$

per cui, supponendo noi  $\bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0'$ , è facile vedere che segni di  $Q_a$ ,  $Q_p$ ,  $F_a$ , ed  $F_a + F_p$  dipendono unicamente dal numeratore delle espressioni che li definiscono. Fatta questa osservazione, possiamo iniziare lo studio sistematico delle disuguaglianze 5.45 ÷ 5.48.

#### Analisi della disuguaglianza 5.45

Dalla 5.36, tenendo presente che nelle condizioni da noi considerate il denominatore è sempre positivo, si ricava che:

$$Q_a > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P[(a - f(v_p)h)mR^2 + aJ_R] + hmRM_a > 0 \quad 5.51$$

Ora è chiaro che se:

$$P[(a - f(v_p)h)mR^2 + aJ_R] \geq 0 \quad 5.52$$

allora la seconda disuguaglianza nella 5.51 è soddisfatta per ogni valore di  $M_a$ . Il valore di  $M_a$  infatti per ipotesi è positivo. E' chiaro altresì, che se invece:

$$P[(a - f(v_p)h)mR^2 + aJ_R] < 0 \quad 5.53$$

allora la seconda disuguaglianza nella 5.51 è soddisfatta solo quando:

$$M_a > \frac{P[(f(v_p)h - a)mR^2 - aJ_R]}{hmR} = \bar{M}_a' \quad 5.54$$

In questo caso affinché risulti  $Q_a > 0$  deve perciò essere:

$$\bar{M}_a' < M_a'' \quad 5.55$$

La 5.52 è vera se:

$$f \leq \frac{a}{h} \left( 1 + \frac{J_R}{mR^2} \right) \quad 5.56$$

La 5.55, sotto l'ipotesi  $p - a > 0$  da noi assunta in questa memoria, è vera invece se:

$$\frac{a}{h} \left( 1 + \frac{J_R}{mR^2} \right) < f < \frac{a}{h} \left( 1 + \frac{J_R}{mR^2} \right) + \frac{f_0(p-a)(mR^2 + 2J_R)}{f_0hmR^2 + pJ_R} = \bar{f}' \quad 5.57$$

Per dimostrare che  $Q_a > 0$  in tutte le possibili situazioni, basta allora verificare che, qualunque siano i valori dei parametri caratteristici del sistema “bicicletta + ciclista”, risulti:

$$f_0 < \bar{f}' \quad 5.58$$

per ogni valore di  $f_0$  tale che  $\bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0'$ . Ma questo è immediato, infatti dal diagramma della funzione  $\bar{f}'$  riportato in Figura 5.6 si vede che la condizione 5.58 è soddisfatta per  $p - a > 0$  addirittura quando  $0 \leq f_0 < \bar{f}_0'$ .

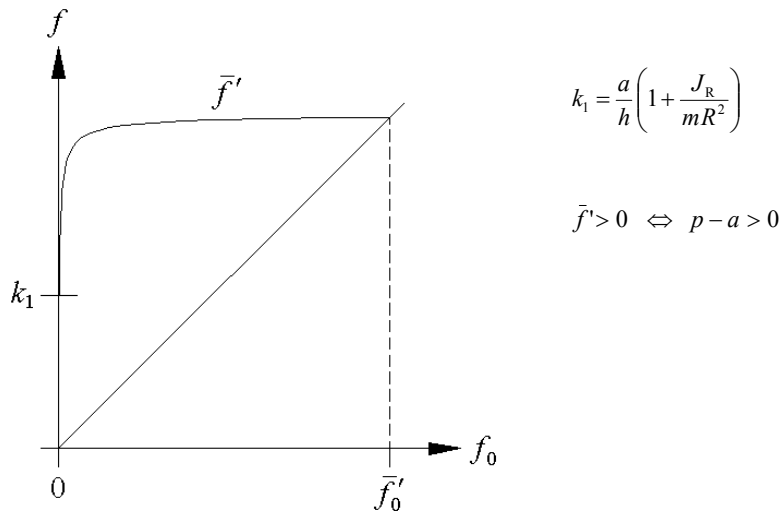


Figura 5.6

Resta dunque provato che qualunque siano i valori dei parametri caratteristici del sistema “bicicletta + ciclista”, è sempre  $Q_a > 0$ .

#### Analisi della disuguaglianza 5.46

Dalla 5.37, tenendo presente che nelle condizioni da noi considerate il denominatore è sempre positivo, si ricava che:

$$Q_p > 0 \quad \Leftrightarrow \quad P(p-a)(mR^2 + J_R) - hmRM_a > 0 \quad 5.59$$

Dunque, essendo per ipotesi  $p - a > 0$ , possiamo senz'altro concludere che:

$$Q_p > 0 \Leftrightarrow M_a < \frac{P(p-a)(mR^2 + J_R)}{hmR} = M_{lr} \quad 5.60$$

La seconda disuguaglianza nella 5.60 mostra che esiste un limite superiore per la coppia di frenamento applicabile affinché il moto del sistema "bicicletta + ciclista" possa avvenire nelle condizioni da noi ipotizzate. Infatti, quando  $M_a = M_{lr}$  risulta  $Q_p = 0$  e quindi il carico sulla ruota posteriore si annulla, con la conseguente possibilità che per valori di  $M_a > M_{lr}$  si presenti il fenomeno del ribaltamento. Dunque, affinché il moto del sistema "bicicletta + ciclista" avvenga nelle condizioni da noi ipotizzate, non deve supporre semplicemente  $M_a \geq M_a''$  ma bensì:

$$M_a'' \leq M_a < M_{lr} \quad 5.61$$

(oltre, ovviamente, alla condizione  $\bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0'$ ). D'ora in avanti quindi assumeremo sempre che la coppia di frenamento  $M_a$  sia soggetta alla limitazione 5.61. Naturalmente, il raggiungimento della condizione critica  $Q_p = 0$  ed il conseguente instaurarsi del fenomeno del ribaltamento quando  $M_a > M_{lr}$ , sarà possibile solo se le disuguaglianze 5.47 ÷ 5.49 non introducono ulteriori restrizioni sul valore di  $M_a$ . Come vedremo, almeno per  $a < p/2$ , questo non avviene e quindi per  $M_a > M_{lr}$  avviene realmente il ribaltamento del sistema "bicicletta + ciclista". A questo proposito è interessante osservare che il valore limite per  $M_a$  fornito dalla 5.60 è esattamente quello che si trova nell'ipotesi di puro rotolamento di entrambe le ruote. Si vede quindi che il fenomeno del ribaltamento si instaura in entrambi i casi per il medesimo valore della coppia di frenamento. Come sappiamo (v. diagramma di Figura 3.1) il valore di  $M_{lr}$  è estremamente prossimo a  $M_a''$  quando, come nel caso adesso in esame, si suppone  $\bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0'$ . Ciò rende il problema ancora più critico. Su questo punto torneremo alla fine del paragrafo.

#### Analisi della disuguaglianza 5.47

Dalla 5.38, tenendo presente che nelle condizioni da noi considerate il denominatore è sempre positivo, si ricava che:

$$F_a > 0 \Leftrightarrow f(v_p)P(p-a)J_R + (p - f(v_p)h)mRM_a > 0 \quad 5.62$$

Ora è chiaro che se:

$$p - f(v_p)h \geq 0 \quad 5.63$$

allora la seconda disuguaglianza nella 5.62 è soddisfatta per ogni valore di  $M_a$ . I valori di  $p-a$  ed  $M_a$  infatti per ipotesi sono positivi. E' chiaro altresì che se invece:

$$p - f(v_p)h < 0 \quad 5.64$$

allora la seconda disuguaglianza nella 5.62 è soddisfatta solo quando:

$$M_a < \frac{f(v_p)P(p-a)J_R}{(f(v_p)h - p)mR} = \bar{M}_a'' \quad 5.65$$

In questo caso, per la 5.61, affinché risulti  $F_a > 0$  deve perciò essere:

$$\bar{M}_a'' > M_{lr} \quad 5.66$$

La 5.63 è vera se:

$$f(v_p) \leq \frac{p}{h} \quad 5.67$$

La 5.66 è vera invece se:

$$\frac{p}{h} < f(v_p) < \frac{p}{h} \left( 1 + \frac{J_R}{mR^2} \right) = \bar{f}_0' \quad 5.68$$

Per dimostrare che  $F_a > 0$  in tutte le possibili situazioni, basta allora verificare che, qualunque siano i valori dei parametri caratteristici del sistema “bicicletta + ciclista”, risulti:

$$f(v_p) < \bar{f}_0' \quad 5.69$$

Ma la 5.69 è sempre soddisfatta, poiché qualunque sia il valore di  $f_0$  è  $f(v_p) < f_0$  mentre per ipotesi si ha  $\bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0'$ . Resta dunque provato che è sempre  $F_a > 0$ .

#### Analisi della disuguaglianza 5.48

Dalla 5.40, tenendo presente che nelle condizioni da noi considerate il denominatore è sempre positivo, si ricava che:

$$F_a + F_p > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -f(v_p)P(p-a)mR^2 + pmRM_a > 0 \quad 5.70$$

Dunque, essendo per ipotesi  $p - a > 0$ , possiamo senz'altro concludere che:

$$F_a + F_p > 0 \quad \Leftrightarrow \quad M_a > \frac{f(v_p)P(p-a)R}{p} = \bar{M}_a''' \quad 5.71$$

E' chiaro allora, per la 5.61, che affinché si abbia  $F_a + F_p > 0$  deve essere:

$$\bar{M}_a''' < M_{lr} \quad 5.72$$

Ma la 5.72 è vera se:

$$f(v_p) < \frac{f_0 p(mR^2 + 2J_R)}{f_0 h m R^2 + p J_R} = \bar{f}'' \quad 5.73$$

Per dimostrare che  $F_a + F_p > 0$  in tutte le possibili situazioni, basta allora verificare che, qualunque

siano i valori dei parametri caratteristici del sistema “bicicletta + ciclista”, risulti:

$$f_0 < \bar{f}'' \quad 5.74$$

per ogni valore di  $f_0$  tale che  $\bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0'$ . Ma questo è immediato, infatti dal diagramma della funzione  $\bar{f}''$  riportato in Figura 5.7 si vede che la condizione 5.74 è sempre soddisfatta.

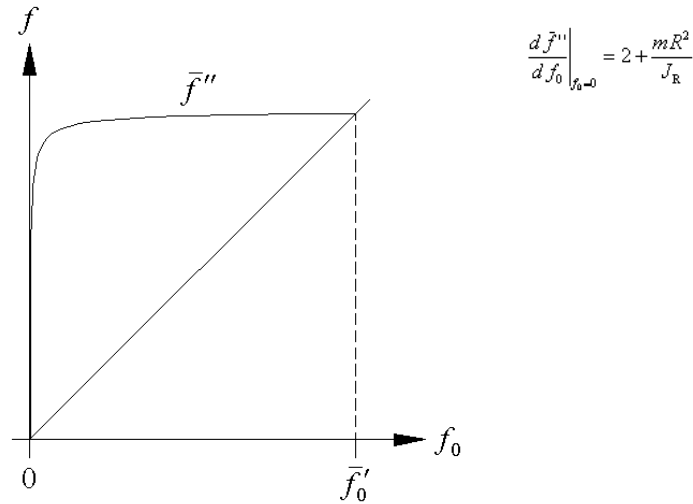


Figura 5.7

Resta dunque provato che qualunque siano i valori dei parametri caratteristici del sistema “bicicletta + ciclista”, è sempre  $F_a + F_p > 0$ .

L’analisi della disuguaglianza 5.49 è più complessa, ma fondamentale. Noi la compieremo limitatamente al caso in cui si abbia  $a < p/2$ , come solitamente avviene nel normale uso di una bicicletta. Ricordiamo che questa è anche l’ipotesi sotto la quale in caso di scarsa aderenza del fondo stradale il freno posteriore è potenzialmente un po’ più efficace di quello anteriore (v. diagramma di Figura 4.2). Innanzitutto osserviamo che essendo sempre  $F_a > 0$  ed i denominatori sempre positivi, la 5.49 si traduce nella condizione:

$$f(v_p)P(p-a)J_R + (p-f(v_p)h)mRM_a \leq f_0 \{P[(a-f(v_p)h)mR^2 + aJ_R] + hmRM_a\} \quad 5.75$$

che, come si potrebbe facilmente verificare con un calcolo diretto, può essere riscritta nel modo sintetico seguente:

$$KM_a \geq H \quad 5.76$$

dove si è posto:

$$K = \{[f(v_p) + f_0]h - p\}mR \quad 5.77$$

$$H = P\{f_0[f(v_p)h - a]mR^2 + [f(v_p)(p-a) - f_0a]J_R\} \quad 5.78$$

Per stabilire quando la disuguaglianza 5.49 è soddisfatta basta allora studiare i segni di  $K$  e di  $H$ . In

Figura 5.8 sono riportati nel piano  $f-f_0$  i luoghi dei punti definiti dalle equazioni  $K = 0$  ed  $H = 0$  nel caso in cui  $a < p/2$ . In Figura 5.9 è riportato invece nel piano  $M-f$  il grafico della funzione:

$$\bar{M} = \frac{H}{K} \tag{5.79}$$

sempre limitatamente alla ipotesi  $a < p/2$ . L'ipotesi  $a < p/2$  influisce sulla disposizione dei punti  $k_1, k_2, k_3, k_4$  come si può vedere dai loro valori riportati per condizioni completamente generali a fianco della Figura 5.8 (tali punti in effetti sono disposti come in figura se  $a < p/2$ ).

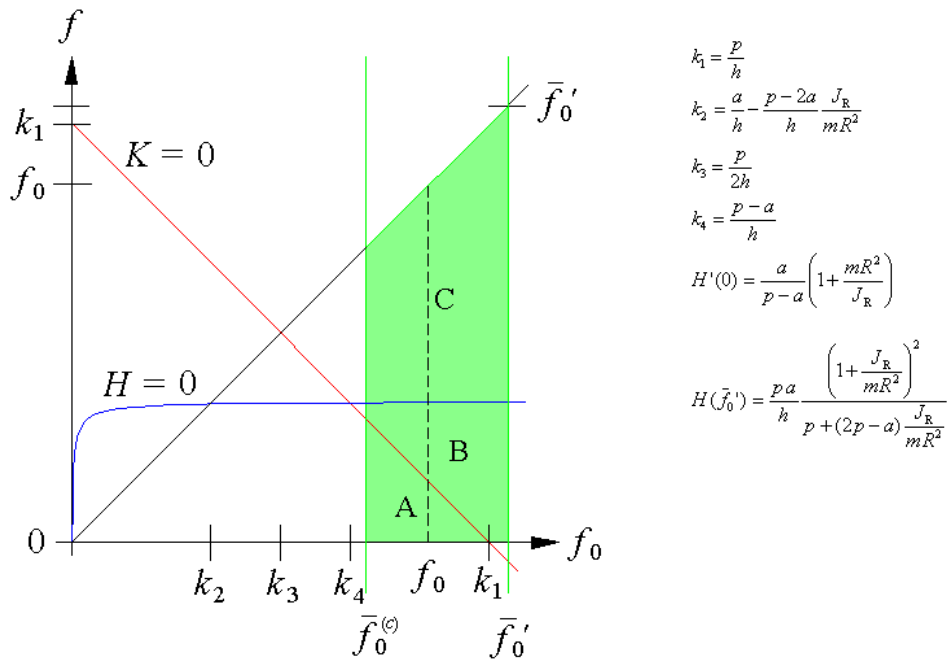


Figura 5.8

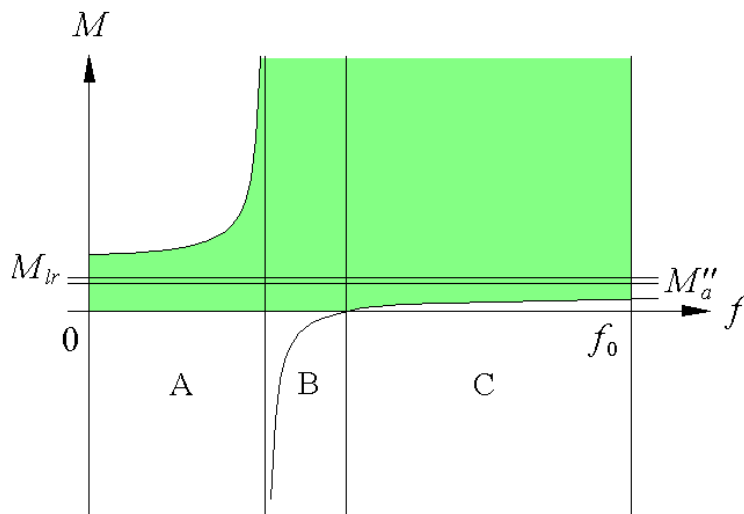


Figura 5.9

Come si può notare l'intervallo  $[0, f_0]$  dei valori ammissibili di  $f$ , risulta diviso in tre regioni, indi-

cate in Figura 5.8 e Figura 5.9 con le lettere A, B e C:

- Nella regione A si ha  $K < 0$ ,  $H < 0$  e la 5.76 è soddisfatta se  $M_a < \bar{M}$
- Nella regione B si ha  $K > 0$ ,  $H < 0$  e la 5.76 è soddisfatta se  $M_a > 0$
- Nella regione C si ha  $K > 0$ ,  $H > 0$  e la 5.76 è soddisfatta se  $M_a \geq \bar{M}$

E' chiaro quindi che affinché risulti, nella ipotesi da noi assunta,  $|F_a| \leq f_0 Q_a$  deve essere contemporaneamente:

$$\bar{M}(0) > M_{lr} \quad 5.80$$

$$\bar{M}(f_0) < M_a \quad 5.81$$

Si ha:

$$\bar{M}(0) = \frac{f_0 P a (m R^2 + J_R)}{(p - f_0 h) m R} \quad 5.82$$

$$\bar{M}(f_0) = \frac{f_0 P [(f_0 h - a) m R^2 + (p - 2a) J_R]}{(2 f_0 h - p) m R} \quad 5.83$$

e come si potrebbe verificare con un calcolo diretto, la 5.80 è soddisfatta quando:

$$f_0 > \frac{p - a}{h} \quad 5.84$$

mentre la 5.81 è soddisfatta quando:

$$\bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0' \quad 5.85$$

Ma, avendo noi supposto  $a < p/2$ , si ha:

$$\frac{p - a}{h} < \frac{p - a}{h} + \frac{p - 2a}{h} \frac{J_R}{m R^2} = \bar{f}_0^{(c)} \quad 5.86$$

e le condizioni 5.80 e 5.81 sono quindi entrambe verificate quando  $\bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0'$ . Possiamo dunque concludere che almeno nell'ipotesi  $a < p/2$  è sempre  $|F_a| \leq f_0 Q_a$ . Questo risultato è importante in quanto mostra che al limite del ribaltamento sussiste aderenza per la ruota anteriore e che quindi il ribaltamento può effettivamente avvenire. Per vedere se applicando una coppia di frenamento  $M_a \geq M_{lr}$  il ribaltamento del sistema "bicicletta + ciclista" avviene realmente, ricordiamo che quando la ruota posteriore non è a contatto con il fondo stradale (v. Figura 3.3), il puro rotolamento della ruota anteriore è possibile solo se (v. 3.29):

$$M_a \leq f_0 P R \left( 1 + \frac{J_R}{m R^2} \right) = M_{Max} \quad 5.87$$

E' chiaro quindi che affinché nel caso che stiamo considerando possa instaurarsi il ribaltamento deve essere, per  $\bar{f}_0^{(c)} \leq f_0 < \bar{f}_0'$ :

$$M_{\text{Max}} > M_{lr} \quad 5.88$$

La condizione 5.88, essendo  $M_{\text{Max}}$  una funzione crescente ed  $M_{lr}$  un valore costante, equivale alla seguente (v. Figura 5.10):

$$M_{\text{Max}}(\bar{f}_0^{(c)}) - M_{lr} > 0 \quad 5.89$$

e poiché si ha:

$$M_{\text{Max}}(\bar{f}_0^{(c)}) - M_{lr} = \frac{PR(p-2a)}{h} \frac{J_R}{mR^2} \left( 1 + \frac{J_R}{mR^2} \right) \quad 5.90$$

possiamo concludere che la 5.88 è senz'altro verificata, e quindi per  $M_a \geq M_{lr}$  avviene il ribaltamento, quando  $a < p/2$ , ipotesi questa già in precedenza utilizzata per dimostrare la validità della disuguaglianza  $|F_a| \leq f_0 Q_a$  (fondamentale per l'instaurarsi del fenomeno del ribaltamento stesso). E' anche interessante osservare che:

$$M_{\text{Max}} = M_{lr} \Leftrightarrow f_0 = \frac{p-a}{2} \quad 5.91$$

per cui, sotto la condizione  $a < p/2$ , il valore di  $f_0$  in corrispondenza del quale risulta  $M_{\text{Max}} = M_{lr}$  coincide con quello indicato con  $k_4$  in Figura 5.8 (anch'essa ottenuta con l'ipotesi  $a < p/2$ ).

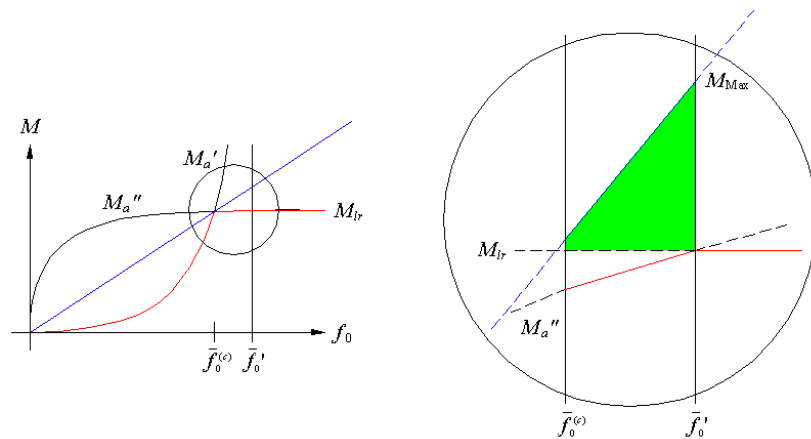


Figura 5.10

Il valore di  $M_{\text{Max}} - M_{lr}$  fornito dalla 5.90, è anche il valore minimo di  $M_{\text{Max}} - M_{lr}$ . Come si era preannunciato a proposito della 5.60, questa quantità è molto piccola e ciò rende il fenomeno del ribaltamento particolarmente insidioso. Infatti un valore di poco superiore a  $M_{lr}$  (già vicinissimo a  $M_a''$ ) può essere maggiore anche di  $M_{\text{Max}}$ , se  $f_0$  è prossimo ad  $\bar{f}_0^{(c)}$  e di conseguenza causare lo

slittamento (e quasi immediato bloccaggio) della ruota anteriore con conseguente aumento del tempo di frenata (cosa questa che noi qui non approfondiremo ma che si potrebbe immediatamente verificare scrivendo le analoghe alle 3.24 ÷ 3.26 per il caso ora in esame; si vedano anche a tele proposito le 5.5 ÷ 5.11). Ma, come dimostreremo nel prossimo paragrafo, l'angolo di ribaltamento dipende in modo diretto dal tempo di frenata e quindi se questo è elevato la ruota posteriore può raggiungere una altezza rilevante dal terreno con conseguente pericolo di caduta. Si noti tuttavia che la situazione qui in discorso è "critica" per il modello del sistema "bicicletta + ciclista" da noi adottato (il valore di  $M_{Max}$  è estremamente vicino a quello di  $M_{lr}$ ) e potrebbe quindi cambiare con un modello di ruota più realistico che tenga conto delle deformabilità del pneumatico.

Concludiamo l'argomento riportando qui di seguito, in corrispondenza ad un assegnato valore di  $f_0$  e per i valori da noi assunti dei parametri caratteristici del sistema "bicicletta + ciclista", i diagrammi di  $F_{tot} = F_a + F_p, Q_p, F_p, Q_a, F_a$  ed  $f_0 Q_a - F_a$  in funzione di  $f(v_p)$  (variabile fra 0 ed  $f_0$ ) e di  $M_a$  (variabile fra  $M_a''$  ed  $M_{lr}$ ).

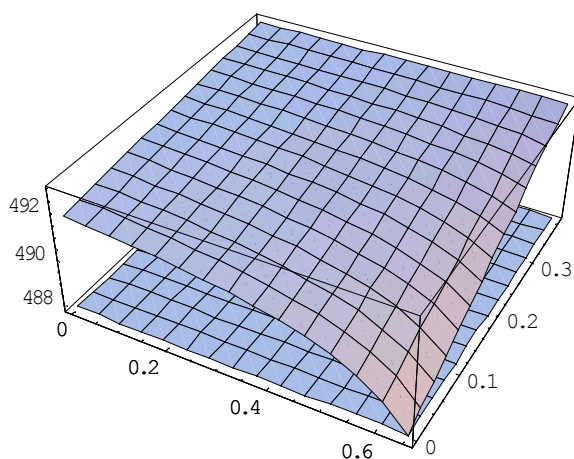


Figura 5.11

#### Diagramma di $F_{tot}$

Si suppone  $f_0 = 0.65, 0 < f < f_0, M_a = M_a'' + X$  con  $X$  variabile fra 0 ed  $M_{lr} - M_a''$ .

In figura è riportato il diagramma di  $F_{tot}$  raffrontato al valore della forza complessiva di frenamento al limite dello slittamento della ruota posteriore (dato dalla 3.6 con  $M_a = M_a''$  ed individuato in figura dal piano orizzontale). Come si può notare, all'instaurarsi dello slittamento della ruota posteriore la forza complessiva di frenamento subisce un brusco incremento, tanto più elevato se il valore di  $f$  è basso rispetto a quello di  $f_0$ . La cosa non deve stupire in quanto la forza  $F_p$  è antagonista ad  $F_a$  ed in caso di slittamento della ruota posteriore diminuisce il rapporto  $F_p/F_a$ . Si noti anche che  $F_{tot}$  cresce all'aumentare di  $M_a$ , più rapidamente se  $f$  è prossimo ad  $f_0$ .

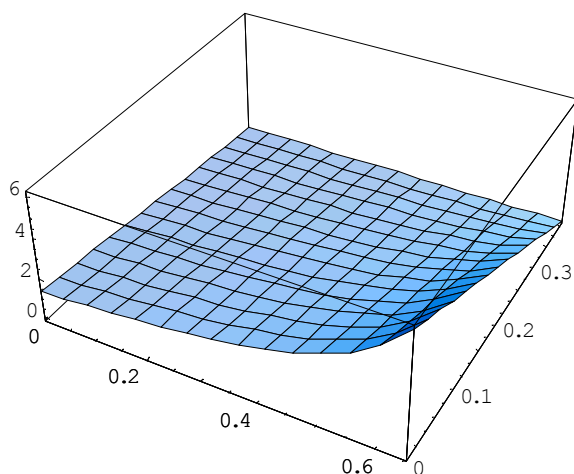


Figura 5.12

#### Diagramma di $Q_p$

Si suppone  $f_0 = 0.65, 0 < f < f_0, M_a = M_a'' + X$  con  $X$  variabile fra 0 ed  $M_{lr} - M_a''$ .

Come si può notare, il valore di  $Q_p$  si mantiene sempre relativamente basso in quanto si è molto vicini al limite di ribaltamento ( $M_a''$  è prossimo a  $M_{lr}$ ). I valori più elevati di  $Q_p$  si hanno quando  $f$  è vicino ad  $f_0$  ed  $M_a$  è prossimo ad  $M_a''$ . In generale tuttavia  $f$  è notevolmente minore di  $f_0$  per cui la situazione è sempre alquanto critica, soprattutto se  $M_a$  è vicino ad  $M_{lr}$ .

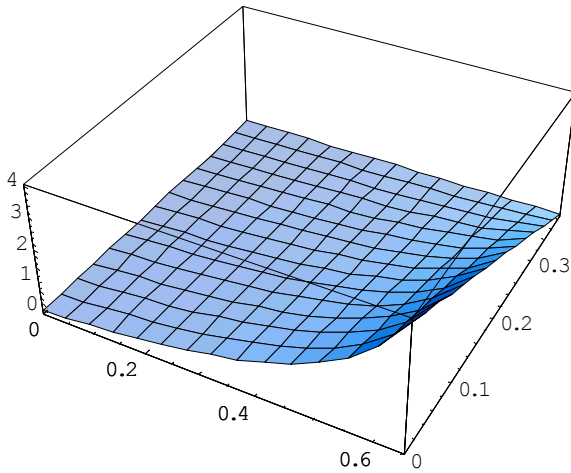


Figura 5.13

### Diagramma di $F_p$

Si suppone  $f_0 = 0.65$ ,  $0 < f < f_0$ ,  $M_a = M_a'' + X$  con  $X$  variabile fra 0 ed  $M_{lr} - M_a''$ .

Come si può notare, il valore di  $F_p$  si mantiene sempre molto basso soprattutto se  $f$  è piccolo, come avviene in generale. Questo mostra che, in caso di slittamento, l'influenza della ruota posteriore sul frenamento è molto scarsa.

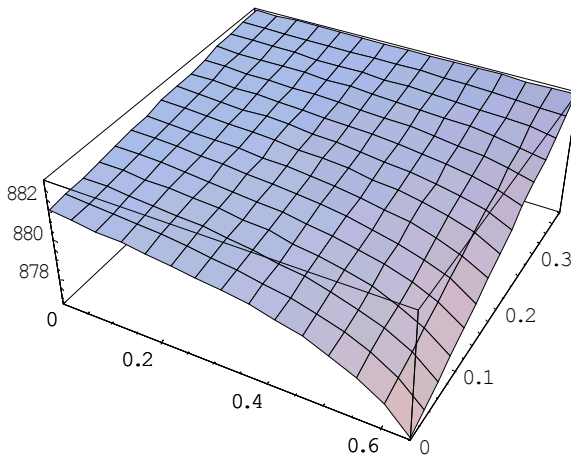


Figura 5.14

### Diagramma di $Q_a$

Si suppone  $f_0 = 0.65$ ,  $0 < f < f_0$ ,  $M_a = M_a'' + X$  con  $X$  variabile fra 0 ed  $M_{lr} - M_a''$ .

Come si può notare, il valore di  $Q_a$  si mantiene sempre relativamente elevato, prossimo a  $P$ . I valori maggiori di  $Q_a$  si hanno quando  $M_a$  è vicino ad  $M_a''$ , ma per  $f$  piccolo  $Q_a$  è prossimo al valore massimo anche quando  $M_a$  è vicino ad  $M_a''$ . In generale quindi la ruota anteriore risulta sempre alquanto caricata.

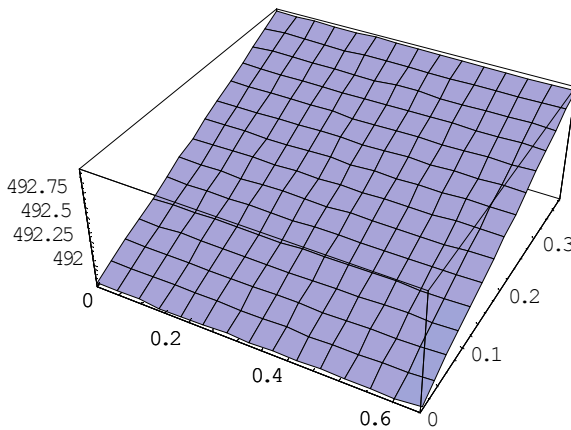
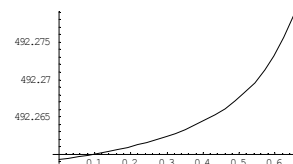


Figura 5.15

### Diagramma di $F_a$

Si suppone  $f_0 = 0.65$ ,  $0 < f < f_0$ ,  $M_a = M_a'' + X$  con  $X$  variabile fra 0 ed  $M_{lr} - M_a''$ .

Come si può notare, la forza  $F_a$  risulta praticamente indipendente da  $f$  mentre rispetto ad  $M_a$  è una funzione lineare crescente. In realtà  $F_a$  dipende anche da  $f$  ma in modo estremamente limitato. La figura qui sotto riportata mostra questa circostanza nel caso in cui  $M_a = M_a'' + X$  con  $X = 0.4$  ( $M_{lr} - M_a''$ ).



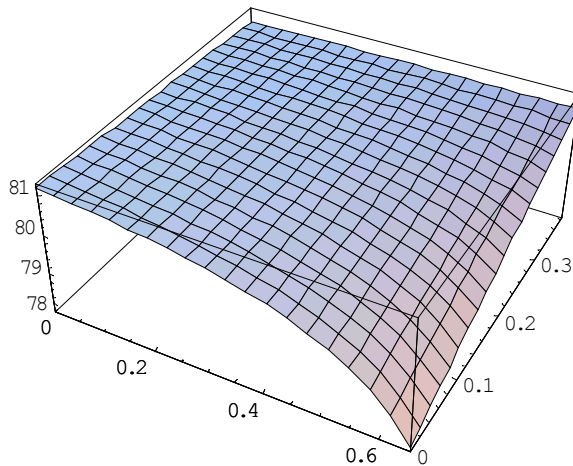


Figura 5.16

#### Diagramma di $f_0 Q_a - F_a$

Si suppone  $f_0 = 0.65$ ,  $0 < f < f_0$ ,  $M_a = M_a'' + X$  con  $X$  variabile fra 0 ed  $M_{lr} - M_a''$ .

Come si può notare, la quantità  $f_0 Q_a - F_a$ , sempre positiva, assume valori in un campo relativamente ristretto (da 78.07 N a 81.18 N). I valori più elevati di  $f_0 Q_a - F_a$  si hanno quando  $f$  è piccolo ed  $M_a$  è prossimo ad  $M_a''$ , mentre se  $M_a$  è prossimo ad  $M_{lr}$  il valore di  $f_0 Q_a - F_a$  è comunque in ogni caso vicino al suo massimo. In generale quindi si ha sempre un certo margine di puro rotolamento per la ruota anteriore, qualunque sia il valore di  $M_a$ .

### **Frenamento in condizioni di slittamento della ruota posteriore quando per frenare si utilizza il solo freno posteriore.**

Questa situazione si presenta, qualunque sia il valore di  $f_0$ , quando alla ruota posteriore viene applicata una coppia di frenamento  $M_p \geq M_p''$ . (In realtà, come si è detto a proposito della 4.13, a rigore, dovrebbe supporre  $f_0$  maggiore di un valore estremamente piccolo, ma tale distinzione è priva di interesse fisico). Anche nel caso in esame, esattamente come nei due precedenti, occorre pre-determinare la direzione della forza di interazione longitudinale fra la strada e la ruota slittante, cioè, nella situazione attuale, la direzione della forza  $F_p$ . Osserviamo allora, a tale proposito, che nel caso ora in esame lo slittamento della ruota posteriore deriva dal fatto che la coppia di frenamento applicata non può più essere opportunamente contrastata dalla coppia generata dalla forza  $F_p$  il cui valore, per fare ciò, dovrebbe essere maggiore di  $f_0 Q_p$ . Ne segue che la velocità di rotolamento della ruota posteriore risulta minore di quella necessaria per il puro rotolamento e che, di conseguenza, la velocità di slittamento sarà orientata nella direzione di avanzamento (come nel caso della ruota di Figura 5.1). La forza  $F_p$  sarà perciò orientata in verso opposto a quello di avanzamento e quindi sarà una forza frenante per il sistema. Usando le nostre solite convenzioni sulla direzione delle forze  $F_a$  ed  $F_p$  (quelle stabilite in Figura 2.1 e riportate per il caso in esame in Figura 5.17) dovremo quindi considerare  $F_p$  positiva e di conseguenza, conformemente alla 5.2, assumere:

$$F_p = f(v_p)Q_p \quad 5.92$$

Usando le convenzioni di Figura 5.17 il valore di  $v_p$  deve anch'esso ritenersi positivo, perché la velocità di slittamento è orientata in modo corretto. Una volta caratterizzata la forza  $F_p$ , la direzione della forza  $F_a$  risulta determinata direttamente dalle equazioni della dinamica del sistema. E' evidente comunque che nel caso ora in esame essa sarà orientata nella direzione di avanzamento, in quanto, avendo noi supposto che il moto della ruota anteriore sia di puro rotolamento, la forza  $F_a$  deve generare una coppia frenante per la ruota anteriore (chiaramente l'ipotesi di puro rotolamento della ruota anteriore dovrà poi essere verificata a risultati ottenuti). Utilizzando le convenzioni di

Figura 5.17, il valore di  $F_a$  risulterà quindi negativo.

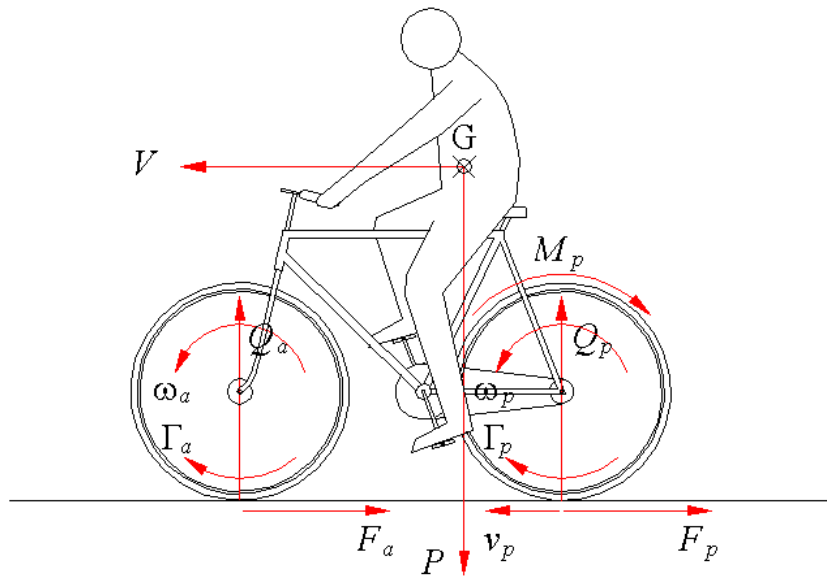


Figura 5.17

Riferendosi alla Figura 5.17 e trascurando le coppie  $\Gamma_a$  e  $\Gamma_p$ , le equazioni della dinamica del sistema “bicicletta + ciclista” sono le seguenti (per  $F_p$  si è usata la sua espressione fornita dalla 5.92):

$$m\dot{V} = -f(v_p)Q_p - F_a \quad 5.93$$

$$Q_a + Q_p = P \quad 5.94$$

$$(F_a + f(v_p)Q_p)h + Q_p a - Q_a(p - a) = 0 \quad 5.95$$

$$J_R \dot{\omega}_a = F_a R \quad 5.96$$

$$J_R \dot{\omega}_p = f(v_p)Q_p R - M_p \quad 5.97$$

$$\omega_a R = V \quad 5.98$$

$$\omega_p R + v_p = V \quad 5.99$$

e da queste relazioni si traggono dopo alcuni passaggi, le seguenti espressioni per  $Q_a$ ,  $Q_p$ ,  $F_a$ ,  $F_p$ ,  $F_a + F_p$ :

$$Q_a = \frac{P[a(mR^2 + J_R) - f(v_p)hmR^2]}{(p + f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.100$$

$$Q_p = \frac{P(p-a)(mR^2 + J_R)}{(p + f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.101$$

$$F_a = -f(v_p) \frac{P(p-a)J_R}{(p + f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.102$$

$$F_p = f(v_p) \frac{P(p-a)(mR^2 + J_R)}{(p + f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.103$$

$$F_a + F_p = f(v_p) \frac{P(p-a)mR^2}{(p + f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.104$$

ed il seguente sistema differenziale, che governa il moto del sistema “bicicletta + ciclista” durante il frenamento:

$$m\dot{V} = -\frac{f(v_p)P(p-a)mR^2}{(p + f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.105$$

$$J_R \dot{\omega}_p = \frac{f(v_p)PR(p-a)(mR^2 + J_R)}{(p + f(v_p)h)mR^2 + pJ_R} - M_p \quad 5.106$$

in cui occorre considerare:

$$v_p = V - \omega_p R \quad 5.107$$

Ricordiamo che nelle precedenti relazioni deve sempre supporre:

$$M_p > M_p'' = f_0 \frac{PR(p-a)(mR^2 + 2J_R)}{(p + f_0 h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.108$$

mentre non vi è alcuna limitazione per il valore di  $f_0$ .

Come si può notare, nella forza frenante complessiva  $F_a + F_p$  non compare il valore di  $M_p$ . Questo può apparire strano invece non è così. Infatti la dipendenza da  $M_p$  avviene tramite il coefficiente  $f$  che è una funzione della velocità di slittamento, a suo volta funzione del valore di  $M_p$  (v. 5.105 ÷ 5.107). E' da osservare comunque a tale riguardo che integrando numericamente il sistema differenziale 5.105 ÷ 5.107 (per una assegnata funzione  $f(v_p)$ ) risulta che dopo pochissimi istanti la ruota posteriore si blocca e quindi, coincidendo da questo istante in poi la velocità di slittamento con la velocità di avanzamento, il frenamento risulta governato dalla sola seguente equazione differenziale, realmente indipendente da  $M_p$ :

$$m\dot{V} = -\frac{f(V)P(p-a)mR^2}{(p + f(V)h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.109$$

Anche questo non deve stupire in quanto a ruota bloccata la coppia  $M_p$  è una azione interna del sistema.

Per confrontare l'efficacia della frenata nel caso in esame rispetto a quello analogo in cui entrambe le ruote hanno un moto di puro rotolamento (caso studiato nel paragrafo 4), calcoliamo la relazione 4.5 per  $M_p = M_p''$ . Si ha:

$$F_a + F_p = f_0 \frac{P(p-a)mR^2}{(p+f_0h)mR^2 + pJ_R} \quad 5.110$$

Questo, come è noto, è il massimo valore raggiungibile dalla forza frenante in condizioni di puro rotolamento per entrambe le ruote quando per frenare si utilizza il solo freno posteriore. Confrontando la 5.110 con la 5.104 si vede che il virtù della limitazione 5.3, la forza frenante in presenza di slittamento della ruota posteriore (cioè, ricordiamo, della ruota frenata) è sempre minore (spesso molto minore) di quella in condizioni di puro rotolamento di entrambe le ruote. La situazione è particolarmente critica se  $V$  è relativamente elevata in quanto, come si vede dal diagramma di Figura 5.2, in tali condizioni il valore di  $f$  è alquanto basso. A questo deve poi aggiungersi il fatto che l'azione del freno, efficace solo nel brevissimo periodo di tempo precedente al bloccaggio della ruota posteriore, non è in grado di realizzare un consistente calo di velocità prima del bloccaggio della ruota stessa. Di questo fatto ci si può rendere formalmente conto integrando il sistema differenziale 5.105 ÷ 5.107, supponendo, per semplicità,  $f$  costante. Questa analisi noi non la faremo, ma in Figura 5.18 n'è mostrato qualitativamente il risultato. Come si può notare il tempo di arresto aumenta considerevolmente in presenza di slittamento.

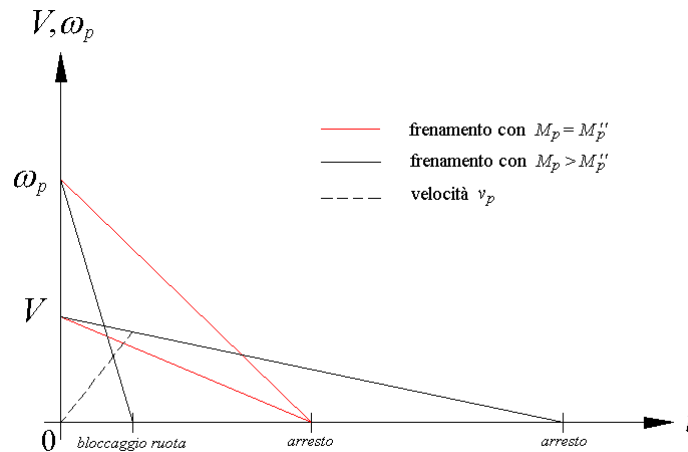


Figura 5.18

Quanto finora detto presuppone ovviamente che le ipotesi assunte per dedurre le 5.100 ÷ 5.106 siano verificate. Vediamo ora se questo è sempre vero o se esistono delle condizioni supplementari. Affinché le 5.100 ÷ 5.106 siano corrette occorre innanzitutto che il denominatore di queste espressioni sia positivo:

$$(p + f(v_p)h)mR^2 + pJ_R > 0 \quad 5.111$$

Devono inoltre essere contemporaneamente soddisfatte le seguenti due condizioni:

$$Q_p > 0 \quad 5.112$$

$$|F_a| \leq f_0 Q_a \quad 5.113$$

Sia la 5.111 che la 5.112 sono sempre vere. La 5.113 è verificata invece quando:

$$f(v_p)[(p-a)J_R - f_0 hmR^2] \leq f_0(mR^2 + J_R) \quad 5.114$$

Ora è chiaro che se:

$$(p-a)J_R - f_0 hmR^2 \leq 0 \quad 5.115$$

allora la disuguaglianza 5.114 è sempre soddisfatta, qualunque siano i valori dei parametri caratteristici del sistema “bicicletta + ciclista”. E’ chiaro altresì che se invece:

$$(p-a)J_R - f_0 hmR^2 > 0 \quad 5.116$$

allora la disuguaglianza 5.114 è soddisfatta solo quando:

$$f(v_p) \leq \frac{f_0(mR^2 + J_R)}{(p-a)J_R - f_0 hmR^2} = \tilde{f}' \quad 5.117$$

La 5.115 richiede che sia:

$$f_0 \geq \frac{p-a}{h} \frac{J_R}{mR^2} \quad (\approx 0.00455 \text{ con i nostri dati}) \quad 5.118$$

La 5.116 richiede invece che sia:

$$0 < f_0 < \frac{p-a}{h} \frac{J_R}{mR^2} \quad 5.119$$

ed in questo caso affinché la limitazione 5.117 sia soddisfatta è necessario che sussista la seguente condizione sui parametri caratteristici del sistema “bicicletta + ciclista”:

$$a > p - \left(1 + \frac{mR^2}{J_R}\right) \quad (\approx -122.51 \text{ con i nostri dati}) \quad 5.120$$

sempre peraltro verificata se, come in generale avviene, il secondo membro è negativo. La 5.120 si ottiene imponendo che per  $f_0 = 0$  la derivata di  $\tilde{f}'$  rispetto ad  $f_0$  sia maggiore di 1 (per cui la curva  $\tilde{f}'$  sovrasti la retta di equazione  $f = f_0$ ). Ma non è necessario analizzare in dettaglio questo caso, infatti, tenendo conto che il valore limite inferiore imposto ad  $f_0$  dalla 5.118 è sempre piccolissimo e ricordando quanto detto all’inizio circa i valori di  $f_0$  ammissibili, possiamo senz’altro concludere che la disuguaglianza 5.113 è sempre vera nei casi di reale interesse fisico. Dunque, i risultati ottenuti e le conseguenze discusse valgono in generale, senza alcuna condizione aggiuntiva.

## 6. CENNI SULLA DINAMICA DEL RIBALTAMENTO

Il ribaltamento della bicicletta, che come abbiamo visto se  $a < p/2$  può sempre verificarsi quando  $f_0 \geq \tilde{f}_0^{(c)}$ , è un fenomeno alquanto complesso. Tuttavia per spiegarne il meccanismo è sufficiente limitarsi ad un'analisi ridotta. Noi, che ci prefiggiamo proprio questo scopo, per fare ciò assumeremo allora le seguenti tre ipotesi semplificative (delle quali solo la prima può risultare restrittiva):

- (1) che la posizione del ciclista non cambi durante il ribaltamento, per cui i valori di  $a$  ed  $h$  si possano considerare costanti (ciò è ragionevolmente vero solo se il sollevamento è contenuto).
- (2) che la rotazione della ruota posteriore sollevata dal terreno, non dia alcun effetto sulla dinamica del sistema "bicicletta + ciclista", per cui la ruota posteriore si possa considerare come ferma.
- (3) che fra il mozzo della ruota anteriore e la forcella non vi sia attrito, per cui la rotazione attorno al mozzo della ruota anteriore del sottosistema "telaio + ciclista"  $\cup$  "ruota posteriore" si possa considerare indipendente dalla dinamica della ruota anteriore (il cui moto in condizioni di puro rotolamento è determinato dalle equazioni 3.24 ÷ 3.26, sotto la limitazione 3.27).

Sia:

- $V'$  la velocità del centro di massa  $G'$  del sottosistema "telaio + ciclista"  $\cup$  "ruota posteriore".
- $\Omega$  la velocità di ribaltamento del sottosistema "telaio + ciclista"  $\cup$  "ruota posteriore".
- $\theta$  l'angolo di ribaltamento.
- $m'$  la massa del sottosistema "telaio + ciclista"  $\cup$  "ruota posteriore" ( $m' = m - m_R$ ).
- $P'$  il peso del sottosistema "telaio + ciclista"  $\cup$  "ruota posteriore" ( $P' = m'g$  dove  $g$  è l'accelerazione di gravità).
- $\rho$  il vettore posizione del centro di massa  $G'$  del sottosistema "telaio + ciclista"  $\cup$  "ruota posteriore", rispetto al mozzo della ruota anteriore.
- $J'_M$  il momento d'inerzia polare del sottosistema "telaio + ciclista"  $\cup$  "ruota posteriore", rispetto al mozzo della ruota anteriore.
- $V_M$  la velocità di avanzamento del mozzo della ruota anteriore.

La situazione in esame è mostrata in Figura 6.1.

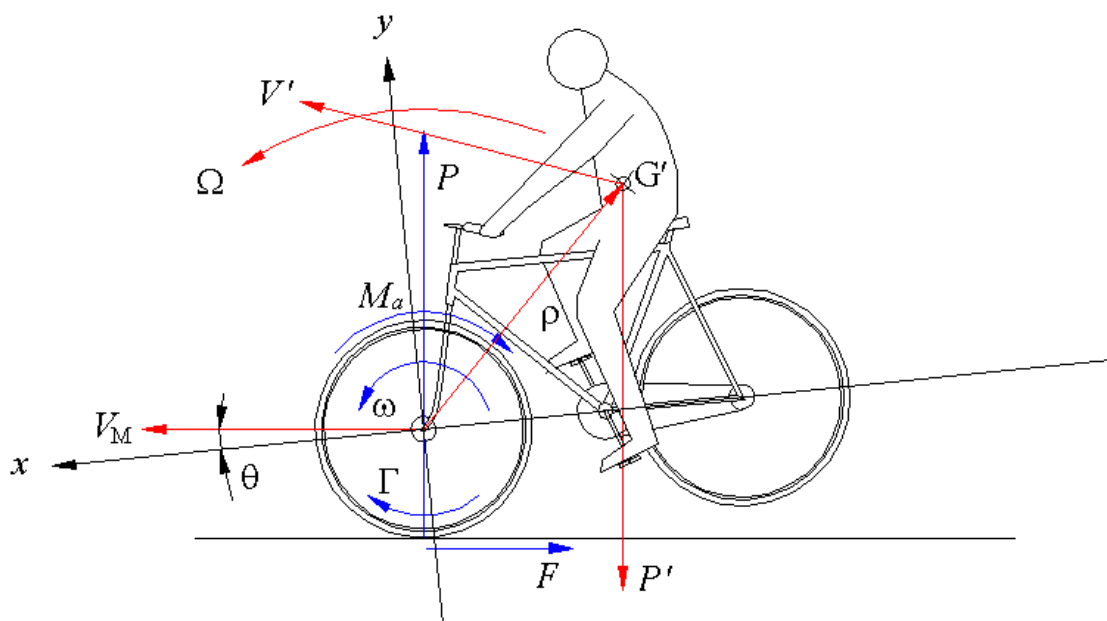


Figura 6.1

Con le ipotesi da noi assunte il problema che stiamo esaminando è analogo a quello del moto piano di un corpo rigido imperniato ad un asse perpendicolare al piano del moto e traslante con velocità nota decrescente. Con le ipotesi da noi assunte quindi, la dinamica del ribaltamento può venire studiata avvalendosi della sola seconda equazione cardinale del moto dei corpi rigidi, scritta rispetto ad un riferimento solidale al sottosistema “telaio + ciclista”  $\cup$  “ruota posteriore” ed avente l’origine nel mozzo della ruota anteriore. Sia:

- $\mathbf{Q}$  la quantità di moto del sottosistema “telaio + ciclista”  $\cup$  “ruota posteriore”.
- $\mathbf{K}$  il momento della quantità di moto del sottosistema “telaio + ciclista”  $\cup$  “ruota posteriore”, rispetto al mozzo della ruota anteriore.
- $\mathbf{M}$  il momento delle forze esterne agenti sul sottosistema “telaio + ciclista”  $\cup$  “ruota posteriore”, rispetto al mozzo della ruota anteriore.

Allora, scegliendo come sistema di riferimento quello formato dalla terna  $\{M, x, y, z\}$  mostrata in Figura 6.1 (il cui asse  $z$  si suppone uscente dal foglio), la seconda equazione cardinale del moto del sottosistema “telaio + ciclista”  $\cup$  “ruota posteriore” ha la forma seguente (per maggiori dettagli su questo punto si rimanda a: T. Levi-Civita, U. Amaldi, “Lezioni di Meccanica Razionale”, Vol. 2, Parte II, Zanichelli):

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} + \mathbf{V}_M \wedge \mathbf{Q} + \Omega \wedge \mathbf{K} = \mathbf{M} \quad 6.1$$

in cui:

$$\mathbf{K} = J'_M \Omega - m' \mathbf{V}_M \wedge \rho \quad 6.2$$

$$\mathbf{Q} = m'(\mathbf{V}_M + \Omega \wedge \rho) \quad 6.3$$

$$\Omega = -\Omega \hat{\mathbf{k}} \quad 6.4$$

Ora, come si vede dalla stessa Figura 6.1, si ha:

$$\mathbf{V}_M = (V_M \cos\theta) \hat{\mathbf{i}} + (V_M \sin\theta) \hat{\mathbf{j}} \quad 6.5$$

$$\rho = -(p - a) \hat{\mathbf{i}} + (h - R) \hat{\mathbf{j}} \quad 6.6$$

ed utilizzando queste due relazioni, nonché la 6.4, dalla 6.2 si trae:

$$\mathbf{K} = - \{J'_M \Omega + m' V_M [(h - R) \cos\theta + (p - a) \sin\theta]\} \hat{\mathbf{k}} \quad 6.7$$

mentre risulta:

$$\mathbf{V}_M \wedge \mathbf{Q} = m' V_M \Omega [(p - a) \cos\theta - (h - R) \sin\theta] \hat{\mathbf{k}} \quad 6.8$$

$$\Omega \wedge \mathbf{K} = 0 \quad 6.9$$

Così, osservando che:

$$\Omega = \dot{\theta} \quad 6.10$$

$$\mathbf{M} = -P'[(p-a)\cos\theta - (h-R)\sin\theta]\hat{\mathbf{k}} \quad 6.11$$

possiamo concludere che l'equazione vettoriale 6.1 è equivalente alla seguente equazione scalare del secondo ordine in  $\theta$  :

$$J'_M \ddot{\theta} + m' \dot{V}_M [(h-R)\cos\theta + (p-a)\sin\theta] = P'[(p-a)\cos\theta - (h-R)\sin\theta] \quad 6.12$$

da integrarsi in conformità alle condizioni iniziali:

$$\theta(0) = 0 \quad 6.13$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad 6.14$$

Ma, limitandoci a considerare il caso di puro rotolamento della ruota anteriore (quello che più di frequente si verifica), conformemente a quanto studiato nel paragrafo 3, si ha:

$$V_M = V_M^0 - \frac{F}{m} t \quad 6.15$$

dove con  $V_M^0$  si è indicata la velocità del sistema "bicicletta + ciclista" all'inizio del ribaltamento, mentre (v. 3.28):

$$F = \frac{mRM_a}{mR^2 + J_R} \quad 6.16$$

(ricordiamo che nella 6.16 deve supporre  $M_{lr} \leq M_a < M_{\text{Max}}$ ). Ne segue che l'equazione 6.12, ha esplicitamente la forma seguente:

$$J'_M \ddot{\theta} - \frac{m'RM_a}{mR^2 + J_R} [(h-R)\cos\theta + (p-a)\sin\theta] = P'[(p-a)\cos\theta - (h-R)\sin\theta] \quad 6.17$$

dove (v. 3.1 e 3.29):

$$PR \frac{p-a}{h} \left(1 + \frac{J_R}{mR^2}\right) \leq M_a < f_0 PR \left(1 + \frac{J_R}{mR^2}\right) \quad 6.18$$

Si noti che la doppia limitazione 6.18 è sempre vera quando, come noi supponiamo, è  $a < p/2$ . Infatti, a pag. 43 si è dimostrato che se  $a < p/2$  il fenomeno del ribaltamento è possibile per  $f_0 \geq \bar{f}_0^{(c)}$  e (v. 3.15):

$$PR \frac{p-a}{h} \left(1 + \frac{J_R}{mR^2}\right) < \bar{f}_0^{(c)} \quad 6.19$$

Poiché l'ammissibilità dell'ipotesi iniziale designata con (1) impone di dover considerare valori dell'angolo  $\theta$  relativamente piccoli, l'equazione 6.17 può essere linearizzata senza commettere errori grossolani nell'ambito di applicabilità della teoria qui sviluppata. Questa semplificazione d'al-

tra parte, essendo la nostra analisi volta unicamente a spiegare il meccanismo del fenomeno del ribaltamento, è poi per nostri fini senz'altro accettabile qualunque sia il valore di  $\theta$  (ovviamente non tale da provocare la caduta del ciclista). La linearizzazione della 6.17 porta alla seguente equazione del secondo ordine in  $\theta$  :

$$\ddot{\theta} = A\theta + B \quad 6.20$$

dove si è posto:

$$A = \frac{1}{J'_M} \left[ \frac{(p-a)m'RM_a}{mR^2 + J_R} - P'(h-R) \right] \quad 6.21$$

$$B = \frac{1}{J'_M} \left[ \frac{(h-R)m'RM_a}{mR^2 + J_R} + P'(p-a) \right] \quad 6.22$$

Il coefficiente  $B$  è da considerarsi sempre positivo mentre il coefficiente  $A$  può essere sia positivo che negativo. Come si ottiene immediatamente dalla 6.21, si ha:

$$A < 0 \Leftrightarrow M_a < P' \frac{h-R}{p-a} \frac{mR^2 + J_R}{m'R} \quad 6.23$$

e la seconda disuguaglianza nella 6.23 è sempre vera per  $M_{lr} \leq M_a < M_{\max}$  a patto che si abbia:

$$f_0 < \frac{h-R}{p-a} = \bar{f}_0^{(p)} (\approx 1.298 \text{ con i nostri dati}) \quad 6.24$$

Chiaramente il valore di  $\bar{f}_0^{(p)}$  deve essere sensibilmente maggiore di  $\bar{f}_0'$  affinché la teoria qui sviluppata sia applicabile con ampio margine a tutti i casi che i possono presentare (in particolare quando il ribaltamento si instaura in condizioni di puro rotolamento di entrambe le ruote, cioè per  $f_0 > \bar{f}_0'$ ). Dal confronto della 3.9 con la 6.24 si ha che:

$$\bar{f}_0' < \bar{f}_0^{(p)} \Leftrightarrow \frac{J_R}{mR^2} < \frac{h(h-R) - p(p-a)}{p(p-a)} (\approx 0.5582 \text{ con i nostri dati}) \quad 6.25$$

Dunque, supponendo che durante il ribaltamento il moto della ruota anteriore sia di puro rotolamento (cioè che  $M_{lr} \leq M_a < M_{\max}$ ), esiste una condizione sui parametri caratteristici del sistema “bicicletta + ciclista” affinché possa risultare  $A < 0$ . Questa condizione è comunque sempre ampiamente verificata per una bicicletta standard usata in modo normale, e quindi si può certamente assumere che in generale sia sempre  $A < 0$ .

Quando  $A < 0$  e la coppia di frenamento  $M_a$  si può considerare costante (come solitamente accade), l'equazione differenziale 6.19 è a coefficienti costanti e la sua soluzione soddisfacente alle condizioni iniziali 6.13 e 6.14 ha la forma seguente:

$$\theta(t) = \frac{B}{|A|} [1 - \cos(\sqrt{|A|}t)] \quad 6.26$$

Dunque, nei casi concreti, almeno per valori normali del coefficiente di attrito radente statico, è questa la legge che governa il fenomeno del ribaltamento quando la ruota anteriore rotola senza strisciare. In Figura 6.2 è riportato per un assegnato valore di  $f_0$  e di  $V_M^0$ , il diagramma della funzione  $\theta(t)$  definita dalla 6.26 relativamente ad alcuni valori di  $M_a$  nell'intervallo  $[M_{lr}, M_{Max}]$ .

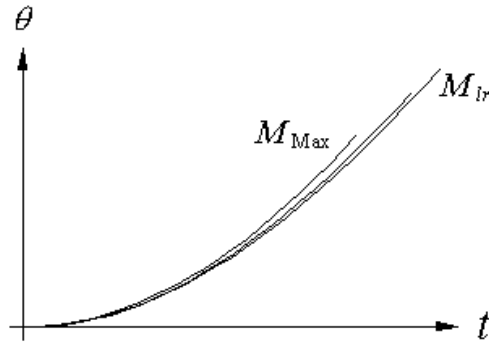


Figura 6.2

Si noti che  $\theta(t)$  non dipende da  $V_M^0$ , tuttavia il suo valore massimo ne è esplicitamente una funzione. Si ha infatti:

$$\theta_{Max} = \theta(t_f) \quad 6.27$$

dove, come si ottiene immediatamente dalla 6.15:

$$t_f = \frac{V_M^0 m R}{M_a} \left( 1 + \frac{J_R}{m R^2} \right) \quad 6.28$$

Ne segue, tenendo conto che  $\theta(t)$  è una funzione crescente del tempo, che maggiore è la velocità del sistema “bicicletta + ciclista” all’istante in cui si instaura il ribaltamento e maggiore è il sollevamento del posteriore che viene raggiunto (com’è ben noto!). Infatti, a parità di coppia di frenamento, maggiore è la velocità  $V_M^0$  e maggiore è il tempo di frenata. Per vedere come relativamente ad un fissato valore di  $f_0$  l’angolo  $\theta$  varia per  $t \in [0, t_f]$  ed  $M_a \in [M_{lr}, M_{Max}]$  conviene porre:

$$M_a = M_{lr} + X(M_{Max} - M_{lr}) \quad 6.29$$

dove ovviamente  $X \in [0, 1]$ , qualunque sia il valore fissato di  $f_0$ . Così facendo, si ottiene allora il grafico riportato in Figura 6.3 di pagina seguente nel quale le “barriere” verticali individuano il valore di  $t_f$  corrispondente a fissati valori della velocità  $V_M^0$  quando  $X$  varia nell’intervallo  $[0, 1]$ . Come si può notare minore è la velocità  $V_M^0$  e minore è il valore di  $\theta_{Max}$ . A parità di  $V_M^0$  il valore di  $\theta_{Max}$  è poi più piccolo quando  $M_a$  è prossimo a  $M_{Max}$  ( $X \approx 1$ ). Bisogna rilevare a questo proposito che la cosa cambia radicalmente quando il valore di  $M_a$  è maggiore di  $M_{Max}$ . In questo caso infatti la ruota anteriore in pochissimi istanti raggiunge il bloccaggio e, come sappiamo, in tale situazione il tempo di frenata aumenta considerevolmente (questo caso però non lo tratteremo in modo esplicito, anche se la cosa non creerebbe alcun problema). Il maggior rischio si ha quindi, come abbiamo

già peraltro detto nel paragrafo 5, quando  $f_0$  è prossimo ad  $\bar{f}_0^{(c)}$ , poiché in tal caso  $M_{\text{Max}}$  è prossimo ad  $M_{lr}$ .

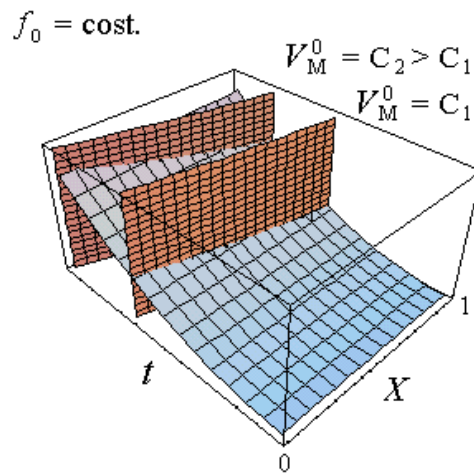


Figura 6.3

In Figura 6.4 e Figura 6.5 qui di seguito riportate è mostrato invece rispettivamente, sempre per un fissato valore di  $f_0$ , il diagramma di  $\theta_{\text{Max}}$  in funzione di  $X$  per differenti valori di  $V_M^0$  ed il diagramma di  $\theta_{\text{Max}}$  in funzione di  $V_M^0$  per  $X$  variabile nell'intervallo  $[0, 1]$ .

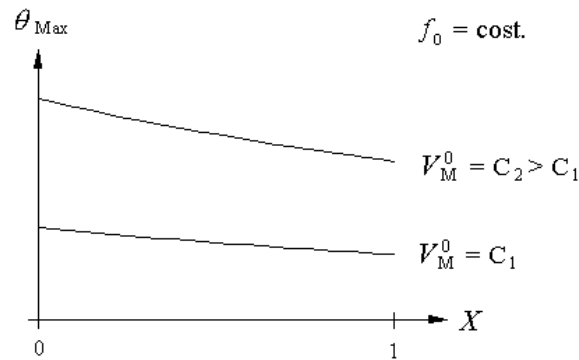


Figura 6.4

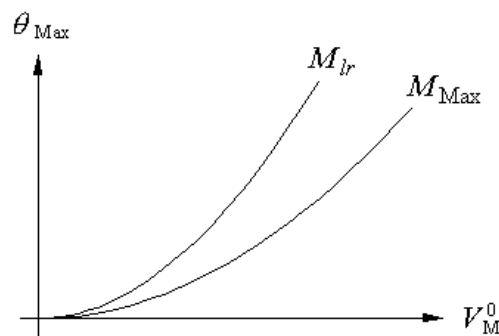


Figura 6.5

Per vedere infine come varia  $\theta_{\text{Max}}$  in funzione di  $M_a$  per differenti valori di  $f_0$  si può fare riferimento alla seguente Figura 6.6. Fissato  $f_0$  risulta individuato il campo di variabilità di  $M_a$  affinché il moto della ruota anteriore sia di puro rotolamento. In corrispondenza di un fissato valore di  $M_a$  in questo campo e di una velocità  $V_M^0$  si ricava allora il cercato valore di  $\theta_{\text{Max}}$ .

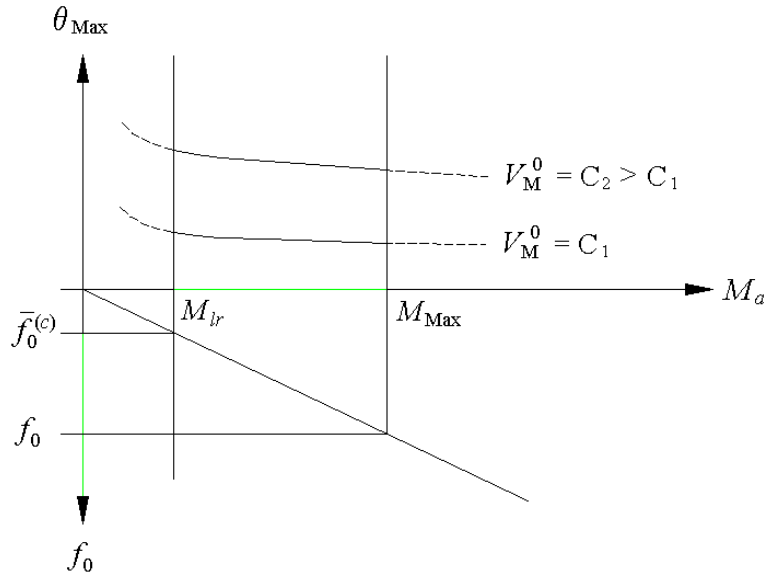


Figura 6.6

Per ottenere una stima formale di  $\theta_{\text{Max}}$  sviluppiamo la 6.26 in serie di Taylor, procedura questa senz'altro valida tenendo conto che  $\theta$  si suppone piccolo. Si ha:

$$\theta(t) = \frac{B}{2}t^2 - \frac{|A|B}{24}t^4 + O(t^6) \quad 6.30$$

Dunque, avvalendosi della 6.28, si trae che:

$$\theta_{\text{Max}} \propto \frac{(V_M^0)^2}{M_a} \quad 6.31$$

E' interessante anche calcolare il valore dell'altezza raggiunta dalla ruota posteriore al termine del ribaltamento. Poiché, come si ottiene immediatamente dalla Figura 6.1, la quota della ruota posteriore rispetto al fondo stradale è data in ogni istante da:

$$\delta_p(t) = p \sin\theta(t) \quad 6.32$$

il valore cercato è:

$$\delta_{p\text{Max}} = p \sin\theta(t_f) \quad 6.33$$

Sviluppando la 6.32 in serie di Taylor, si perviene alla seguente relazione, il cui secondo membro differisce da quello della 6.30 solo per i termini di ordine  $t^n$  con  $n \geq 6$ :

$$\delta_p(t) = p \left[ \frac{B}{2} t^2 - \frac{|A|B}{24} t^4 + O(t^6) \right] \quad 6.34$$

Così possiamo concludere che, almeno se  $\theta$  è relativamente piccolo:

$$\delta_{p\text{Max}} \approx p\theta_{\text{Max}} \quad 6.35$$

Chiaramente, al termine del ribaltamento, cioè quando la bicicletta si è fermata, il sottosistema “te-  
laio + ciclista”  $\cup$  “ruota posteriore” ricade all’indietro secondo la legge di gravità (naturalmente se  
non si è verificato il capottamento). Questo argomento non viene trattato nella presente memoria,  
come non viene neppure trattato il caso in cui risulti  $A > 0$ , situazione nella quale, supponendo  
sempre  $M_a$  costante, la soluzione del problema differenziale 6.19, 6.13 + 6.14 è di tipo esponenzia-  
le.

Concludiamo l’analisi della dinamica del ribaltamento con la seguente osservazione importante. Il  
fatto che  $\theta_{\text{Max}}$  sia tanto maggiore quanto più è lungo il tempo di frenata non deve stupire perché nel  
caso in esame si è in presenza di fenomeni dissipativi interni al sistema. La situazione è quindi di-  
versa da quella che si presenta quando nel moto piano di un corpo rigido imperniato ad un asse per-  
pendicolare al piano del moto, l’asse viene bruscamente frenato dall’esterno. In questo caso infatti  
non vi è dissipazione nel sistema. Precisamente, durante il ribaltamento l’energia cinetica del siste-  
ma “bicicletta + ciclista” si trasforma in parte in calore per effetto dell’azione del freno e dell’attrito  
ed in parte in energia potenziale. Più è intensa la coppia di frenamento, e di conseguenza, a parità di  
velocità iniziale del ribaltamento, minore il tempo di frenata, tanto maggiore è la trasformazione di  
energia cinetica in energia termica e quindi tanto minore è il sollevamento della ruota posteriore,  
qualunque sia il valore di  $V_M^0$ . Così in una frenata brevissima, caratterizzata da forte dissipazione,  
quasi tutta l’energia cinetica si trasforma subito in calore ed il ribaltamento è quasi inesistente, men-  
tre in una frenata più lunga, caratterizzata da minore dissipazione, parte dell’energia cinetica si tra-  
sforma temporaneamente in energia potenziale, che al momento dell’arresto della bicicletta si ri-  
converte in cinetica per poi dissiparsi nel contatto della ruota posteriore con il suolo. In questo caso  
quindi il ribaltamento può essere considerevole.

-----

## 7. CONCLUSIONI

Riassumiamo ora brevemente i principali risultati ottenuti nei paragrafi precedenti in modo da fornire un quadro completo delle fenomenologie studiate.

1. In condizioni di puro rotolamento di entrambe le ruote, la frenata con l'uso del solo freno anteriore può avvenire in tre diverse modalità:
  - Se il coefficiente di attrito radente statico fra suolo e ruote è inferiore ad un certo valore critico  $\bar{f}_0^{(c)}$  la coppia di frenamento applicabile non può essere superiore al valore  $M_a'$ ; superato questo limite infatti si instaura lo slittamento e poi il bloccaggio della ruota anteriore.
  - Se il coefficiente di attrito radente statico fra suolo e ruote è compreso fra  $\bar{f}_0^{(c)}$  ad un certo valore critico  $\bar{f}_0'$  la coppia di frenamento applicabile non può essere superiore al valore  $M_a''$ ; superato questo limite infatti si instaura lo slittamento della ruota posteriore.
  - Se il coefficiente di attrito radente statico fra suolo e ruote è superiore al valore critico  $\bar{f}_0'$  la coppia di frenamento applicabile non può essere superiore al valore  $M_{lr}$ ; superato questo limite infatti si instaura il fenomeno del ribaltamento.

I valori  $M_a'$  ed  $M_a''$  sono funzioni crescenti del coefficiente di attrito radente statico fra suolo e ruote  $f_0$ , e risulta  $M_a'(\bar{f}_0^{(c)}) = M_a''(\bar{f}_0^{(c)})$ . Il valore  $M_{lr}$  non dipende invece da  $f_0$  e si ha:  $M_a''(\bar{f}_0') = M_{lr}$ .

2. In condizioni di puro rotolamento di entrambe le ruote, la frenata con l'uso del solo freno posteriore si può sempre considerare avvenire in una sola modalità, comunque sia il valore del coefficiente di attrito radente statico fra suolo e ruote. In ogni caso infatti, la coppia di frenamento applicabile non può essere superiore al valore  $M_p''$ , superato il quale si instaura lo slittamento e quasi immediato bloccaggio della ruota posteriore.
3. In condizioni di puro rotolamento di entrambe le ruote, la frenata con l'uso del solo freno anteriore è sempre potenzialmente più efficace di quella con l'uso del solo freno posteriore. Fa eccezione il caso in cui è  $a < p/2$  ed il coefficiente di attrito radente statico fra suolo e ruote è inferiore ad un certo valore critico  $\bar{f}_0^{(l)} < \bar{f}_0^{(c)}$ .
4. Quando nella ruota frenata si instaura lo slittamento in pochissimi istanti si giunge al bloccaggio della ruota stessa. In questi casi la capacità di frenamento cala considerevolmente perché l'interazione fra ruota e fondo stradale avviene per mezzo del coefficiente di attrito radente dinamico  $f$  invece che per mezzo del coefficiente di attrito radente statico  $f_0$  e si ha sempre  $f < f_0$ . Quanto ora detto vale anche nel caso della ruota anteriore quando si è in condizioni di ribaltamento. Questa situazione si presenta se la coppia di frenamento applicata alla ruota è superiore al valore  $M_{Max}$ .
5. In relazione a quanto sopra detto è bene precisare che qualora si utilizzi il solo freno anteriore o posteriore si verificano le seguenti circostanze:
  - L'uso del solo freno anteriore può produrre slittamento sia della ruota anteriore che di quella posteriore. Nel primo caso si ha un considerevole calo di efficienza del frenamento. Nel secondo caso invece avviene un leggero aumento di efficacia del frenamento.
  - L'uso del solo freno posteriore può produrre unicamente lo slittamento della ruota posteriore, con conseguente considerevole calo di efficacia del frenamento.
6. Il fenomeno del ribaltamento nasce dal fatto che il frenamento produce un trasferimento di carico dalla ruota posteriore alla ruota anteriore con conseguente possibilità che il carico sulla ruota

posteriore risulti nullo (condizione di ribaltamento incipiente). L'annullamento del carico sulla ruota posteriore può avvenire solo quando la coppia di frenamento agente sulla ruota anteriore raggiunge il valore limite  $M_{lr}$ . La frenata con l'uso del solo freno posteriore non può quindi produrre mai il ribaltamento. Limitandoci a considerare la frenata con l'uso del solo freno anteriore, si dimostra che:

- In condizioni di puro rotolamento di entrambe le ruote, il ribaltamento avviene se il valore del coefficiente di attrito radente statico fra suolo e ruote è superiore al valore critico  $\bar{f}_0'$ .
- In condizioni di slittamento/bloccaggio della ruota anteriore (ruota frenata), non può mai verificarsi il ribaltamento.
- In condizioni di slittamento della ruota posteriore (ruota non frenata), il ribaltamento avviene senz'altro quando  $a < p/2$  se il valore del coefficiente di attrito radente statico fra suolo e ruote è superiore al valore critico  $\bar{f}_0^{(c)} < \bar{f}_0'$ .

7. Il valore massimo dell'angolo di ribaltamento raggiungibile  $\theta_{Max}$  dipende unicamente dal tempo di frenata. Più è lungo questo tempo, e quindi, per un valore fissato della coppia di frenamento, maggiore è la velocità del sistema "bicicletta + ciclista" all'istante iniziale del ribaltamento, più l'angolo  $\theta_{Max}$  è grande. Chiaramente il tempo di frenata è maggiore se la ruota di appoggio è in condizioni di slittamento anziché di puro rotolamento. Questo caso si verifica se la coppia di frenamento è maggiore del valore  $M_{Max}$  (ovviamente superiore a  $M_{lr}$ ). La situazione di ribaltamento peggiore si verifica allora quando il coefficiente di attrito radente statico è di poco superiore ad  $\bar{f}_0^{(c)}$ , poiché in questo caso  $M_{lr}$  è di poco inferiore ad  $M_{Max}$ .

-----

## APPENDICE LEGITTIMAZIONE DELLE IPOTESI ASSUNTE

Le ipotesi da noi assunte in questo scritto possono apparire restrittive, ma in realtà non è così se lo scopo che ci si prefigge è quello di ottenere una spiegazione dei fenomeni in istudio. Il discorso sarebbe ovviamente diverso se invece si intendesse sviluppare un modello matematico del sistema “bicicletta + ciclista” atto a prevedere, a fini pratici, il reale comportamento del frenamento di una bicicletta. Principalmente due sono le ipotesi da noi assunte che potrebbero essere condizionanti:

1. avere considerato le ruote come dei corpi rigidi, e quindi avere trascurato gli effetti dovuti al pneumatico.
2. avere considerato il ciclista come un corpo rigido, rigidamente solidale al telaio della bicicletta, e quindi avere trascurato i possibili spostamenti del centro di massa del sistema “bicicletta + ciclista” dovuti all’azione della forza d’inerzia agente sul ciclista.

Per quanto riguarda il precedente punto 1, osserviamo che il modello rigido di ruota contiene tutti gli elementi fondanti del modello con pneumatico; quello che distingue i due modelli è infatti solo l’accuratezza della risposta. Su questo punto non ci dilungheremo oltre poiché l’argomento è trattato in modo completo (almeno per i fini di nostro interesse) in un’altra memoria dell’Associazione Scientifica Galileo Galilei di Cesena (v. Bibliografia [5]).

Per quanto riguarda invece il precedente punto 2, osserviamo che tranne nel caso di un rilevante ribaltamento, il ciclista si può effettivamente supporre pressoché fermo e quindi risulta ampiamente ammissibile considerarlo rigido e solidale al telaio. A questo proposito potrebbe essere interessante studiare la dinamica del sistema “bicicletta + ciclista” nel caso in cui il ciclista possa subire, per effetto dell’inerzia, dei piccoli spostamenti ed in particolare traslare orizzontalmente sul sellino e piegare il busto in avanti. Così facendo infatti si potrebbero capire i limiti introdotti dal precedente punto 2. Questa analisi esula però dai fini della presente memoria e quindi non la compiremo. Riportiamo però qui di seguito un esempio semplice di analisi di un fenomeno analogo a quello a cui ora accennato, in modo da fornire una traccia a chi volesse affrontare l’argomento.

### **Problema propedeutico allo studio dei possibili spostamenti del ciclista causati nella frenata dalla forza d’inerzia .**

Si consideri un carrello di massa  $M$  sopra al quale è collocata una massa mobile  $m$  fissata all’estremità di una molla, di costante elastica  $k$ , la cui altra estremità è saldata al carrello stesso. Supponiamo che il carrello viaggi a velocità costante  $V_0$  e che la massa  $m$  sia in quiete con il suo baricentro sulla perpendicolare a quello del carrello. Supponiamo infine che ad un dato istante considerato come iniziale, al carrello venga applicata una forza di frenamento costante  $F$ . La situazione ora descritta è schematizzata in Figura A.1.

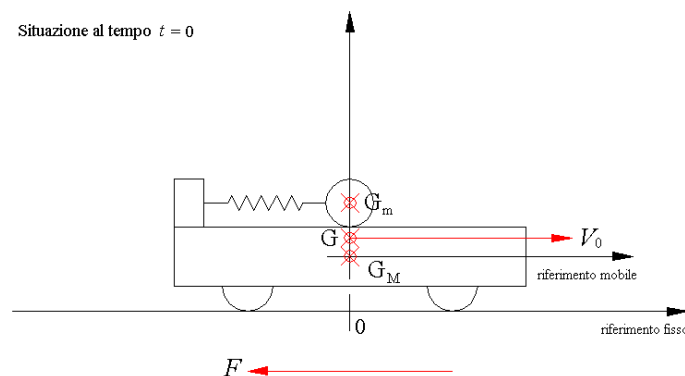


Figura A.1

Chiaramente, per effetto della forza d'inerzia la massa  $m$  subirà uno spostamento in avanti durante la frenata, spostamento che viene contrastato dall'azione della molla. La situazione ora descritta è schematizzata in Figura A.2. Noi ci proponiamo di determinare lo spostamento della massa  $m$  rispetto alla sua posizione iniziale quando  $t \in [0, t_f]$  dove  $t_f$  è il tempo di frenata del sistema “carrello + massa”.

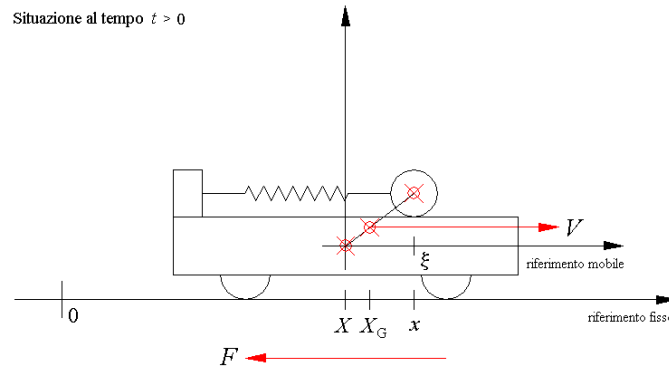


Figura A.2

Supponiamo per semplicità che siano trascurabili la massa delle ruote del carrello, la massa della molla e la massa del supporto della molla. Indichiamo quindi con:

- $X_G$  la coordinata di  $G$  rispetto al riferimento fisso.
- $X$  la coordinata di  $G_M$  rispetto al riferimento fisso.
- $x$  la coordinata di  $G_m$  rispetto al riferimento fisso.
- $\xi$  la coordinata di  $G_m$  rispetto al riferimento mobile.

Rispetto al riferimento fisso, il moto del baricentro del sistema “carrello + massa” e quello della massa  $m$  sono governati dalle seguenti equazioni:

$$(m + M)\dot{V} = -F \quad \text{A.1}$$

$$m\ddot{x} = -kx \quad \text{A.2}$$

Ma, in forza della definizione di baricentro si ha:

$$mx + MX = (m + M)X_G \quad \text{A.3}$$

per cui risulta:

$$m\dot{x} + M\dot{X} = (m + M)V \quad \text{A.4}$$

D'altra parte si ha anche:

$$\dot{x} = \dot{\xi} + \dot{X} \quad \text{A.5}$$

Possiamo quindi scrivere:

$$V = \dot{X} + \frac{m}{m + M}\dot{\xi} \quad \text{A.6}$$

nonché:

$$x = \xi \quad \text{A.7}$$

$$\ddot{x} = \ddot{\xi} + \ddot{X} \quad \text{A.8}$$

Utilizzando le A.6 ÷ A.8, le equazioni A.1 ed A.2 assumono allora rispettivamente la forma seguente, comoda per i nostri scopi:

$$(m + M)\ddot{X} + m\ddot{\xi} = -F \quad \text{A.9}$$

$$m\ddot{\xi} + k\xi + m\ddot{X} = 0 \quad \text{A.10}$$

Alle equazioni A.9, A.10 devono poi associarsi le seguenti condizioni iniziali:

$$X(0) = 0 \quad ; \quad \dot{X}(0) = V_0 \quad ; \quad \xi(0) = 0 \quad ; \quad \dot{\xi}(0) = 0 \quad \text{A.11}$$

Le funzioni  $X$  e  $\xi$  soluzione del problema differenziale A.9 ÷ A.11 sono:

$$X(t) = V_0 t - \frac{F}{m + M} \frac{t^2}{2} - \frac{m^2}{(m + M)^2} \frac{F}{k} \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m + M}} t \right) \right] \quad \text{A.12}$$

$$\xi(t) = \frac{m}{m + M} \frac{F}{k} \left[ 1 - \cos \left( \sqrt{\frac{k}{m + M}} t \right) \right] \quad \text{A.13}$$

ed utilizzando nella A.6 le A.12 e A.13, si ottiene:

$$V(t) = V_0 - \frac{F}{m + M} t \quad \text{A.14}$$

Il diagramma delle funzioni  $X$ ,  $\xi$  e  $V$  nell'intervallo  $[0, t_f]$  è mostrato in Figura A.3.

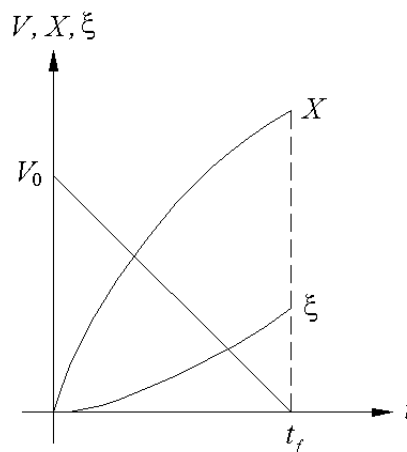


Figura A.3

Il tempo di frenata  $t_f$  del sistema “carrello + massa” si ottiene immediatamente dalla A.14 e risulta:

$$t_f = \frac{(m + M)V_0}{F} \quad \text{A.15}$$

La A.13, unitamente alla A.15, forniscono la soluzione del problema che ci siamo posti. E' naturale supporre che il valore della costante elastica  $k$  sia tale che lo spostamento della massa  $m$  sia piccolo. Lo studio completo della dinamica del sistema in esame esula dai nostri fini e quindi non lo affronteremo.

----- FINE -----

## **BIBLIOGRAFIA GENERALE**

- [1] T. Levi-Civita, U. Amaldi, “Lezioni di Meccanica Razionale”, Vol. 1, Vol. 2 Parte I, Vol. 2 Parte II, Zanichelli.
- [2] V. Cossalter, “Cinematica e Dinamica della Motocicletta”, Edizioni Progetto.
- [3] G. Pollone, “Costruzioni Automobilistiche – Il Veicolo”, Vol. 1, Levrotto & Bella.
- [4] O. Sisini, “Meccanica Applicata alle Macchine”, Parte II e Parte III, Casa Editrice Ambrosiana.



## **INDICE GENERALE**

<b>1. INTRODUZIONE</b>	<b>1</b>
<b>2. GENERALITÀ SULLA FRENATA IN CONDIZIONI DI PURO ROTOLAMENTO</b>	<b>3</b>
<b>3. LA FRENATA IN CONDIZIONI DI PURO ROTOLAMENTO QUANDO SI USA SOLTANTO IL FRENO ANTERIORE</b>	<b>8</b>
<b>4. LA FRENATA IN CONDIZIONI DI PURO ROTOLAMENTO QUANDO SI USA SOLTANTO IL FRENO POSTERIORE</b>	<b>14</b>
<b>5. CENNI SULLA FRENATA IN PRESENZA DI SLITTAMENTO DI UNA RUOTA QUANDO SI USA SOLTANTO IL FRENO ANTERIORE O IL FRENO POSTERIORE</b>	<b>18</b>
- FRENAMENTO IN CONDIZIONI DI SLITTAMENTO DELLA RUOTA ANTERIORE QUANDO PER FRENARE SI UTILIZZA IL SOLO FRENO ANTERIORE	19
- FRENAMENTO IN CONDIZIONI DI SLITTAMENTO DELLA RUOTA POSTERIORE QUANDO PER FRENARE SI UTILIZZA IL SOLO FRENO ANTERIORE	23
- FRENAMENTO IN CONDIZIONI DI SLITTAMENTO DELLA RUOTA POSTERIORE QUANDO PER FRENARE SI UTILIZZA IL SOLO FRENO POSTERIORE	36
<b>6. CENNI SULLA DINAMICA DEL RIBALTAMENTO</b>	<b>41</b>
<b>7. CONCLUSIONI</b>	<b>49</b>
<b>APPENDICE LEGITTIMAZIONE DELLE IPOTESI ASSUNTE</b>	<b>51</b>
<b>BIBLIOGRAFIA GENERALE</b>	<b>55</b>

