

**M. G. BUSATO**

**DIMOSTRAZIONE GENERALE DEL  
PRINCIPIO DEL SAINT VENANT  
PER I SOLIDI ELASTICO-LINEARI**

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

## SOMMARIO

*In questo scritto viene riportata, seguendo l'impostazione di Osvaldo Zanaboni (1937), la dimostrazione generale del principio del Saint Venant per i solidi elastico-lineari. In pratica viene stabilito, con argomentazioni energetiche, un teorema generale della elasticità lineare, il cosiddetto "teorema della equivalenza elastica". La dimostrazione del principio del Saint Venant è ottenuta poi come corollario di questo teorema.*

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

## 1. PROBLEMA E PRINCIPIO DEL SAINT VENANT

Come è noto, si dice *problema del Saint Venant* la determinazione dello stato di tensione in un solido elastico-lineare omogeneo ed isotropo di forma cilindrica, libero nello spazio, non soggetto a forze di massa ed in equilibrio sotto l'azione di forze di superficie (che qui indicheremo con  $\mathbf{p}_a$  e  $\mathbf{p}_b$ ) agenti esclusivamente alle due basi del cilindro. La seguente Figura 1.1 mostra schematicamente la situazione ora descritta.<sup>(1)</sup>

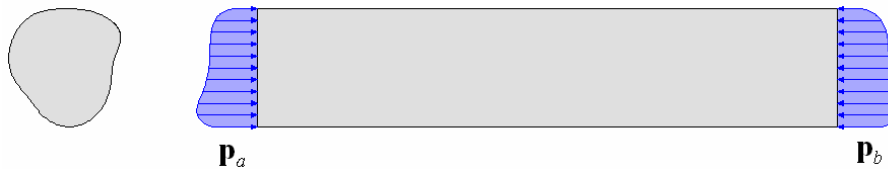


Figura 1.1

Chiaramente, il problema in esame potrebbe essere affrontato in via del tutto generale risolvendo le equazioni dell'equilibrio elastico relative al caso in esame. Uno studio a questo livello di generalità risulta tuttavia molto complicato e potrebbe essere compiuto solo precisando la forma del cilindro e le forze di superficie  $\mathbf{p}_a$  e  $\mathbf{p}_b$  applicate alle sue basi. Seguendo questo modo di procedere, a parte le difficoltà analitiche, si otterrebbero quindi risultati privi di generalità e di fatto inutili per le applicazioni pratiche della teoria. E' possibile ottenere tuttavia, sotto opportune condizioni (il cilindro deve essere sufficientemente allungato e di sezione trasversale compatta), delle soluzioni approssimate che, ad eccezione delle regioni a ridosso delle basi, descrivono con ottima precisione lo stato di tensione nel cilindro comunque siano le forze di superficie  $\mathbf{p}_a$  e  $\mathbf{p}_b$  applicate alle sue estremità, e che risultano pertanto estremamente utili nelle applicazioni concrete. E' stato infatti osservato che:

*Lo stato di tensione nel cilindro a sufficiente distanza dalle basi non cambia se si sostituiscono le distribuzioni  $\mathbf{p}_a$  e  $\mathbf{p}_b$  con nuove distribuzioni  $\mathbf{p}'_a$  e  $\mathbf{p}'_b$  purché queste siano staticamente equivalenti alle prime.*

La frase sopra riportata costituisce l'enunciato del cosiddetto *principio del Saint Venant*, ed ha manifestamente una portata di enorme rilevanza. Basti infatti osservare che il principio del Saint Venant può anche essere enunciato nella seguente forma equivalente:

*Lo stato di tensione nel cilindro a sufficiente distanza dalle basi dipende unicamente dalla risultante e dal momento risultante dei carichi applicati alle basi stesse, e non dalla loro effettiva distribuzione.*

Ciò consente di concludere che nel problema del Saint Venant si possono individuare in tutto 6 stati di tensione indipendenti, che potremmo chiamare "fondamentali" e che a sufficiente distanza dalle basi del cilindro, tutti i possibili stati di tensione, corrispondenti a situazioni arbitrarie di carico applicato alle basi del cilindro, possono ottenersi come combinazione lineare di questi 6 particolari stati di tensione.<sup>(2)</sup>

<sup>1)</sup> Qui col termine "cilindro" si intende un corpo ottenuto per estrusione di una regione piana (chiusa e semplicemente connessa) lungo un segmento perpendicolare alla regione stessa. La sezione trasversale del "cilindro" può essere quindi di forma arbitraria. Si noti che nessuna ipotesi è fatta sulle distribuzioni di forze  $p_a$  e  $p_b$  che potranno pertanto essere diverse fra loro. Esse tuttavia per ipotesi devono costituire un sistema equilibrato ed avranno quindi necessariamente risultante e momento risultante uguali ed opposti.

<sup>2)</sup> Gli stati di tensione fondamentali sono 6 in quanto 3 sono le componenti della risultante e 3 sono le componenti del momento risultante dei carichi applicati alle basi.

Il principio del Saint Venant è stato considerato a lungo un'intuizione fisica indimostrabile rappresentante una legge della natura ed è per questa ragione è stato definito "principio". Successivamente tuttavia si è cominciato a ipotizzare che tale "principio" fosse contenuto nella teoria della elasticità lineare in modo intrinseco e che quindi in pratica fosse un teorema. Si iniziò così a studiarlo per giungere alla "dimostrazione del principio". Questa fu trovata, ed in ipotesi molto più generali di quelle del problema del Saint Venant per il quale il principio fu enunciato, da Osvaldo Zanaboni nel 1937.<sup>(3)</sup> Successivamente, ad opera dello stesso Zanaboni e di altri autori, furono poi trovate, ma solo per determinate geometrie della sezione trasversale, delle limitazioni atte a stabilire la distanza dalle basi del cilindro a partire dalla quale lo stato di tensione può ritenersi dipendente unicamente dalla risultante e dal momento risultante dei carichi applicati alle estremità.<sup>(4)</sup> In questo scritto è riportata la dimostrazione generale del principio del Saint Venant utilizzando il metodo ideato dallo Zanaboni nel 1937 (v. Nota 3). In pratica viene stabilito, con argomentazioni energetiche, un teorema generale della elasticità lineare, il cosiddetto *teorema della equivalenza elastica* e la dimostrazione del "principio del Saint Venant" è ottenuta come corollario di questo teorema. Prima di fare ciò tuttavia è necessario dimostrare una proposizione preliminare indispensabile per la dimostrazione del teorema della equivalenza elastica e ciò sarà fatto nel prossimo paragrafo.

## 2. PROPOSIZIONE PRELIMINARE ALLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DELLA EQUIVALENZA ELASTICA

Sia  $C_1$  un corpo elastico-lineare arbitrario, di contorno  $\Sigma$ , non soggetto a forze di massa ed in equilibrio sotto l'azione di forze di superficie  $\mathbf{p}$  agenti su una porzione  $\Sigma_p$  (non necessariamente semplicemente connessa) del suo contorno; chiaramente:  $\Sigma_p \subset \Sigma$ . Sia poi  $C_2$  un secondo corpo elastico-lineare ottenuto per accrescimento di  $C_1$  mediante apporto di materia su una porzione  $\Sigma'$  del contorno di  $C_1$  sulla quale non agiscono forze di superficie; dunque  $\Sigma' \subset \Sigma - \Sigma_p$ . Supponiamo infine che  $C_2$ , che per costruzione possiede una parte di contorno identica a quella di  $C_1$  nella quale è senz'altro contenuta la regione  $\Sigma_p$ , non sia soggetto a forze di massa e, al pari di  $C_1$ , sia in equilibrio sotto l'azione delle sole forze di superficie  $\mathbf{p}$  agenti sulla regione  $\Sigma_p$  del suo contorno (che come si è detto esiste per costruzione). Quanto ora descritto è schematicamente mostrato in Figura 2.1.<sup>(5)</sup>

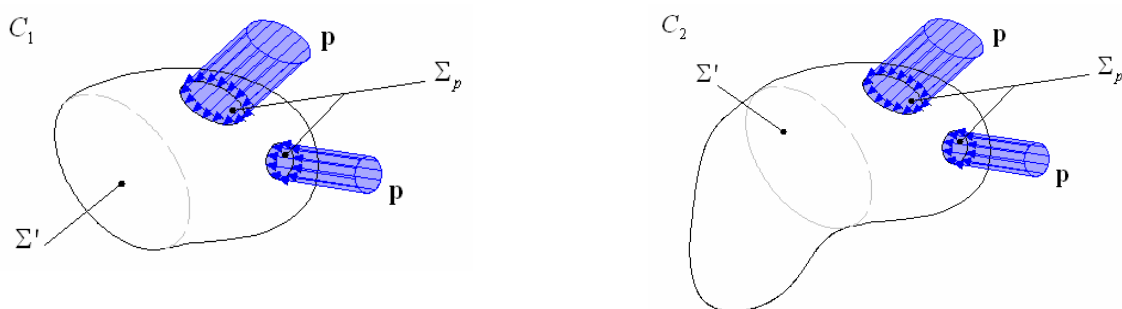


Figura 2.1

<sup>3)</sup> Si veda: O. Zanaboni, "Dimostrazione Generale del Principio del De Saint-Venant", Rendiconti della Regia Accademia dei Lincei, Anno 1937, Vol. 25, pag. 117 – 121.

<sup>4)</sup> Si veda ad esempio: O. Zanaboni, Rendiconti della Regia Accademia dei Lincei, Anno 1937, Vol. 25, pag. 595; R. A. Toupin, "Saint-Venant's principle", Arch. Rat'l Mechanics Anal. 18 (1965), pag. 83.

<sup>5)</sup> Chiaramente, poiché si suppone che i corpi siano in equilibrio sotto l'azione delle forze di superficie  $\mathbf{p}$ , occorre che tali forze costituiscano un sistema equilibrato. Se quindi la regione  $\Sigma_p$  non è semplicemente connessa (come ad esempio in Figura 2.1), dovranno allora individuarsi in essa almeno due sottoregioni  $\Sigma_{p1}$  e  $\Sigma_{p2}$  e su cui agiscono delle forze di superficie  $p_1$  e  $p_2$  formanti due sistemi fra loro equilibrati.

Siano  $L_1$  ed  $L_2$  il lavoro di deformazione prodotto dai carichi (le forze  $\mathbf{p}$ ) rispettivamente sui corpi  $C_1$  e  $C_2$ . Chiaramente il lavoro  $L_1$  si potrebbe determinare risolvendo il problema dell'equilibrio elastico del corpo  $C_1$  e lo stesso dicasi per quanto riguarda il lavoro  $L_2$ . In ogni caso comunque, per le ipotesi assunte, il problema dell'equilibrio elastico di  $C_2$  si può scomporre nella somma di due problemi di equilibrio elastico, uno per il corpo  $C_1$  e l'altro per il corpo  $c_2 = C_2 - C_1$ , di contorno  $\sigma$ , che esiste per costruzione.<sup>(6)</sup> Chiaramente sul corpo  $C_1$  si dovranno ora considerare agenti oltre alle forze di superficie  $\mathbf{p}$  applicate su  $\Sigma_p$  anche le forze di superficie  $\mathbf{p}_2$  esercitate su di esso dal corpo  $c_2$  attraverso  $\Sigma'$ , mentre sul corpo  $c_2$  si dovranno considerare agenti le sole forze di superficie  $\mathbf{p}_2$  esercitate su di esso dal corpo  $C_1$  sempre attraverso  $\Sigma'$  (v. Figura 2.2).

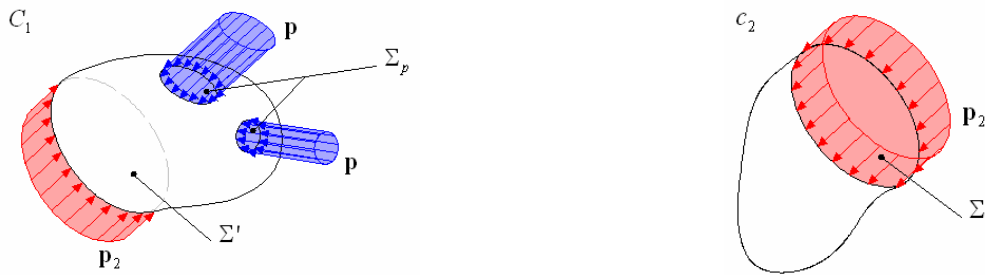


Figura 2.2

Sia  $L_1'$  il lavoro di deformazione che le forze  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{p}_2$  compiono su  $C_1$  ed  $l_2$  il lavoro di deformazione che le forze  $\mathbf{p}_2$  compiono su  $c_2$ . Per quanto sopra detto si ha:

$$L_2 = L_1' + l_2 \quad 2.1$$

Ma il lavoro  $L_1'$  si può scomporre nella somma di tre termini: quello che rappresenta il lavoro compiuto dalle forze  $\mathbf{p}$  indipendentemente dalle  $\mathbf{p}_2$ , lavoro che per definizione è  $L_1$ , quello compiuto alle forze  $\mathbf{p}_2$  indipendentemente dalle  $\mathbf{p}$ , che indicheremo con  $\lambda_1$ , e quello compiuto dalle forze  $\mathbf{p}$  per l'azione delle  $\mathbf{p}_2$  e viceversa, che indicheremo con  $l_m$ . Dunque:<sup>(7)</sup>

$$L_1' = L_1 + \lambda_1 + l_m \quad 2.2$$

Possiamo quindi concludere che:

$$L_2 = L_1 + \lambda_1 + l_m + l_2 \quad 2.3$$

Immaginiamo ora che le forze trasmesse reciprocamente fra i corpi  $C_1$  e  $c_2$  attraverso  $\Sigma'$  non siano quelle reali  $\mathbf{p}_2$  (corrispondenti al carico esterno applicato) ma delle forze che differiscano di poco da queste  $\tilde{\mathbf{p}}_2 = (1 + \mu)\mathbf{p}_2$  dove  $\mu$  è una quantità reale arbitraria, sufficientemente piccola. L'ipotesi assunta non modifica le condizioni di carico sul corpo  $C_2$  che risulta quindi sempre in equilibrio

<sup>(6)</sup> Esso è formato dalla quantità di materia aggiunta a  $C_1$  per costruire  $C_2$ .

<sup>(7)</sup> Si veda ad esempio: M. Capurso, "Lezioni di Scienza delle Costruzioni", Pitagora Editrice, Par. 5.6, pag. 211, e precisamente la formula (5.74).

sotto l'azione delle forze di superficie  $\mathbf{p}$  agenti su  $\Sigma_p$ . Essa tuttavia sostituisce lo stato di tensione corrispondente alle reali condizioni di carico con uno che, seppure ammissibile, non è soluzione del problema dell'equilibrio elastico del corpo  $C_2$  nelle condizioni di carico da noi considerate. Ne segue, in virtù del *teorema di minimo dell'energia complementare*, che il corrispondente lavoro di deformazione, che qui indicheremo con  $\tilde{L}_2$ , risulterà maggiore di  $L_2$ :<sup>(8)</sup>

$$\tilde{L}_2 > L_2 \quad 2.4$$

Chiaramente, il lavoro  $\tilde{L}_2$  potrà pensarsi ottenuto con gli stessi ragionamenti che hanno portato alla formula 2.3 per il lavoro di deformazione  $L_2$ , e quindi potremo scrivere, con evidente simbolismo:

$$\tilde{L}_2 = L_1 + \tilde{\lambda}_1 + \tilde{l}_m + \tilde{l}_2 \quad 2.5$$

Ma per definizione, nella 2.3:<sup>(9)</sup>

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \int_{\Sigma} \mathbf{p}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{p}_2}^{(1)} dS \quad ; \quad l_m = \int_{\Sigma} \mathbf{p}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{p}}^{(1)} dS \quad ; \quad l_2 = \frac{1}{2} \int_{\sigma} \mathbf{p}_2 \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{p}_2}^{(2)} dS \quad 2.6$$

dove con  $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{p}_2}^{(1)}$ ,  $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{p}}^{(1)}$  ed  $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{p}_2}^{(2)}$  si sono indicati nell'ordine: lo spostamento finale dei punti di  $C_1$  prodotto dalle  $\mathbf{p}_2$  indipendentemente dalle  $\mathbf{p}$ , lo spostamento finale dei punti di  $C_1$  prodotto dalle  $\mathbf{p}$  indipendentemente dalle  $\mathbf{p}_2$  e lo spostamento finale dei punti di  $c_2$  prodotto dalle  $\mathbf{p}_2$ . Chiaramente quando  $\mathbf{p}_2 \rightarrow \tilde{\mathbf{p}}_2 = (1 + \mu)\mathbf{p}_2$  anche gli spostamenti finali prodotti dalle  $\mathbf{p}_2$ , per il legame lineare che intercorre fra tensioni e deformazioni, subiscono una trasformazione analoga. Così quando in luogo delle  $\mathbf{p}_2$  si considerano le  $\tilde{\mathbf{p}}_2$ , al posto degli spostamenti  $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{p}_2}^{(1)}$  e  $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{p}_2}^{(2)}$  si devono considerare gli spostamenti  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{p}_2}^{(1)} = (1 + \mu)\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{p}_2}^{(1)}$  ed  $\tilde{\boldsymbol{\eta}}_{\mathbf{p}_2}^{(2)} = (1 + \mu)\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{p}_2}^{(2)}$ . Ne segue che fra i lavori  $\lambda_1$ ,  $l_m$ ,  $l_2$  e  $\tilde{\lambda}_1$ ,  $\tilde{l}_m$ ,  $\tilde{l}_2$  intercorrono necessariamente le relazioni seguenti:

$$\tilde{\lambda}_1 = (1 + \mu)^2 \lambda_1 \quad ; \quad \tilde{l}_m = (1 + \mu) l_m \quad ; \quad \tilde{l}_2 = (1 + \mu)^2 l_2 \quad 2.7$$

Avvalendoci delle 2.7 ora ottenute, dalla 2.5 si ricava:

$$\tilde{L}_2 = L_1 + (1 + \mu)^2 \lambda_1 + (1 + \mu) l_m + (1 + \mu)^2 l_2 \quad 2.8$$

Possiamo allora concludere, in forza delle 2.3 e 2.4, che sussiste l'importante disuguaglianza:

$$(l_m + 2\lambda_1 + 2l_2) \mu + (\lambda_1 + l_2) \mu^2 > 0 \quad 2.9$$

<sup>8)</sup> Si veda ad esempio: A. Sollazzo – S. Marzano, “Scienza delle Costruzioni”, UTET, Vol. 2, Cap. 4, Par. 13, pag. 107. Lo Zanaboni nella sua dimostrazione fa invece riferimento al teorema di Menabrea che si può considerare comunque un corollario del teorema di minimo dell'energia complementare. Per maggiori dettagli sul teorema di Menabrea si veda ad esempio: O. Belluzzi, “Scienza delle Costruzioni”, Zanichelli, Vol. 1, Par. 343, pag. 659 e Par. 345, pag. 675. E' importante osservare che la 2.4 deriva dall'ipotesi che sia nullo il lavoro delle tensioni interne sulla parte di superficie del corpo interessata dai vincoli. Ciò è vero se i vincoli sono rigidi o, come nel caso che stiamo trattando, se il corpo non è vincolato.

<sup>9)</sup> Si veda ad esempio: M. Capurso, “Lezioni di Scienza delle Costruzioni”, Pitagora Editrice, Par. 5.6, pag. 211, e precisamente, la formula (5.67) per quanto concerne la prima e la terza delle 2.6 e la formula (5.73) per quanto concerne la seconda delle 2.6.

La disuguaglianza 2.9 deve essere verificata per ogni valore di  $\mu$  e quindi, essendo per definizione  $\lambda_1$  e  $l_2$  quantità positive, occorre che sia:

$$l_m + 2\lambda_1 + 2l_2 = 0 \quad 2.10$$

Dalla 2.10 ora ottenuta si deduce che il lavoro  $l_m$  deve essere legato a  $\lambda_1$  ed  $l_2$  dalla relazione seguente:

$$l_m = -2(\lambda_1 + l_2) \quad 2.11$$

Utilizzando la 2.11 nella 2.3 si trova allora che:

$$L_2 = L_1 - 2(\lambda_1 + l_2) \quad 2.12$$

e quindi, in pratica, essendo come si è detto  $\lambda_1$  e  $l_2$  quantità positive, che:

$$L_1 > L_2 \quad 2.13$$

Questa è la relazione che cercavamo. Essa mostra che il lavoro di deformazione compiuto dalle forze  $\mathbf{p}$  sul corpo  $C_1$  è senz'altro maggiore del lavoro compiuto dalle stesse forze  $\mathbf{p}$  sul corpo  $C_2$  (più grande di  $C_1$  ed ottenuto da  $C_1$  nel modo precisato all'inizio del paragrafo).

### 3. IL TEOREMA DELLA EQUIVALENZA ELASTICA

Le formule 2.12 e 2.13 ottenute nel paragrafo precedente ci consente di dimostrare in modo semplice e generale un'importante proprietà dei solidi elastico-lineari, nota come teorema della equivalenza elastica. Il teorema della equivalenza elastica potrebbe anche dimostrarsi per via analitica ma sotto ipotesi più restrittive e quindi meno utili ai fini di un inquadramento delle proprietà generali dei solidi elastico-lineari.<sup>(10)</sup>

Sia  $C$  un corpo elastico-lineare arbitrario, di contorno  $\Sigma$ , non soggetto a forze di massa ed in equilibrio sotto l'azione di forze di superficie  $\mathbf{p}$  agenti su una porzione  $\Sigma_p$  del suo contorno, non necessariamente semplicemente connessa, ma comunque tale da non coincidere con  $\Sigma$  in modo tale che una parte della superficie del corpo risulti non caricata. A partire da  $C$  costruiamo poi idealmente una successione  $\{C_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  di corpi di volume sempre maggiore, mediante un processo di accrescimento analogo a quello che nel paragrafo precedente portava da  $C_1$  a  $C_2$  (ciò è possibile per l'ipotesi fatta sulla regione  $\Sigma_p$ ). Nella successione  $\{C_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  assumeremo  $C_0 = C$  e supporremo che gli elementi siano ordinati in modo tale che per ogni  $k$  risulti  $C_k \subset C_{k+1}$ . Tale scelta garantisce che per ogni  $j > i$  il corpo  $C_j$  si possa pensare formato dall'unione del corpo  $C_i$  con il corpo  $c_j = C_j - C_i$ , la cui esistenza risulta garantita. Chiaramente, per costruzione tutti gli elementi di  $\{C_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  presentano una parte di contorno identica (non necessariamente semplicemen-

<sup>10)</sup> Per maggiori dettagli su questo ultimo puntosi veda ad esempio: R. Baldacci, "Scienza delle Costruzioni", UTET, Vol. 1, Par. 45, pag. 101. La dimostrazione ivi riportata si fonda su un procedimento dovuto a Sternberg; si veda a tale proposito: E. Sternberg, Quart, Appl. Math., 11, 393 (1953).

te connessa) che contiene senz'altro la regione  $\Sigma_p$ . Supponiamo allora che tutti gli elementi di  $\{C_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  siano in equilibrio sotto l'azione delle sole forze  $\mathbf{p}$  applicate in  $\Sigma_p$  e che quindi si trovino nelle medesime condizioni di carico del copro  $C$ . Ciò premesso, accanto alla successione  $\{C_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  consideriamo la successione  $\{L_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  formata dai valori del lavoro di deformazione causato su ciascun elemento di  $\{C_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  dalle forze che agiscono su di esso (le forze  $\mathbf{p}$ ). E' ovvio che a ciascuna coppia di elementi (anche non necessariamente contigui) della successione  $\{C_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  potranno applicarsi i risultati ottenuti nel paragrafo precedente. Per la 2.13 possiamo allora senz'altro concludere che  $\{L_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  è una successione strettamente decrescente in quanto sarà:

$$L_1 > L_2 > L_3 > \dots \quad 3.1$$

Ma il lavoro di deformazione per sua natura è una quantità positiva per cui la successione  $\{L_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  deve necessariamente convergere ad un limite finito e positivo  $L$ :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L_k = L \quad 3.2$$

Ciò significa, per il criterio di Cauchy sulle serie convergenti, che esiste un numero positivo  $\varepsilon$  piccolo a piacere in corrispondenza del quale esiste un valore intero positivo  $\alpha_\varepsilon$  (dipendente dal valore di  $\varepsilon$ ) tale che per ogni coppia di valori  $i$  e  $j$  soddisfacenti alla condizione  $j > i > \alpha_\varepsilon$  risulta:

$$L_i - L_j < \varepsilon \quad 3.3$$

Come si è detto, comunque si scelga  $j > i$ , il corpo  $C_j$  (a cui corrisponde il lavoro di deformazione  $L_j$ ) si può sempre pensare formato dall'unione del corpo  $C_i$  (a cui corrisponde il lavoro di deformazione  $L_i$ ) e di un corpo  $c_j = C_j - C_i$  (esattamente come nel paragrafo precedente si poteva pensare  $C_2$  formato dall'unione di  $C_1$  con il corpo  $c_2$ ). Ne segue, in forza della 2.12, che potremo sempre scrivere (supponendo  $j > i$ ):

$$L_j = L_i - 2(\lambda_i + l_j) \quad 3.4$$

dove, dette  $\mathbf{p}_j$  le forze che mutuamente si trasmettono i corpi  $C_i$  e  $c_j$  attraverso la loro superficie di contatto, con  $\lambda_i$  si è indicato il lavoro compiuto sul corpo  $C_i$  dalle forze  $\mathbf{p}_j$  indipendentemente dalle  $\mathbf{p}$ , mentre con  $l_j$  si è indicato il lavoro compiuto sul corpo  $c_j$  dalle forze  $\mathbf{p}_j$ . La 3.4 induce ad associare alla successione  $\{L_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  le successioni ad elementi positivi  $\{\lambda_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  e  $\{l_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$ . E' chiaro poi, in virtù della positività di  $\lambda_i$  e  $l_j$ , che avvalendosi della 3.4 la disuguaglianza 3.3 può essere sostituita dalla disuguaglianza seguente, valida, al pari della 3.3, per  $\varepsilon$  fissato piccolo a piacere e  $j > i > \alpha_\varepsilon$ :

$$\lambda_i + l_j < \frac{\varepsilon}{2} \quad 3.5$$

Ma essendo, come si è detto,  $\lambda_i$  e  $l_j$  quantità positive, la loro somma può diventare piccola a piace-

re se e solo se entrambe le quantità diventano piccole a piacere separatamente. Ne segue in particolare che la successione  $\{l_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  deve ammettere limite e questo limite deve essere zero:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} l_k = 0 \quad 3.6$$

Ciò significa, per come la successione di corpi  $\{C_k; k = 0, 1, 2, \dots\}$  è stata realizzata, che dopo un certo accrescimento vi sarà una regione della parte accresciuta sulla quale il lavoro di deformazione causato dalle forze di superficie  $\mathbf{p}$  (agenti per costruzione lontano da questa parte di corpo) avrà senz'altro un valore trascurabile. Formalmente ciò si può esprimere dicendo che esiste un valore  $\bar{i}$  tale che per ogni  $j > \bar{i}$  sulla porzione  $\bar{c}_j = C_j - C_{\bar{i}}$  di  $C_j$  le forze applicate a  $C_j$  non compiono lavoro di deformazione apprezzabile:  $\bar{l}_j \approx 0$ . Ma, detto  $\varphi$  il potenziale elastico del materiale che costituisce il corpo  $C_j$ , il lavoro  $\bar{l}_j$  è l'integrale di  $\varphi$  esteso a  $\bar{c}_j$  e poiché  $\varphi$  è una quantità non negativa, il fatto che  $\bar{l}_j$  sia infinitesimo in  $\bar{c}_j$  implica che lo stesso potenziale elastico  $\varphi$  sia infinitesimo in  $\bar{c}_j$ . D'altra parte  $\varphi$  è una funzione quadratica positiva delle tensioni, nulla se e solo se tutte le tensioni sono nulle. Dunque  $\varphi$  può essere infinitesimo in  $\bar{c}_j$  se e solo se in  $\bar{c}_j$  tutte le tensioni sono nulle. Abbiamo dunque dimostrato che lo stato di tensione nel corpo a distanza sufficientemente grande dal punto di applicazione delle forze  $\mathbf{p}$  (che per definizione costituiscono un sistema equilibrato), è sempre trascurabile. Questo risultato prende il nome di teorema della equivalenza elastica.

#### 4. DIMOSTRAZIONE DEL PRINCIPIO DEL SAINT VENANT

Il risultato ottenuto nel paragrafo precedente può essere sfruttato per la dimostrazione del principio del Saint Venant esposto nel paragrafo 1. Infatti, supponiamo di sostituire le distribuzioni di forze superficiali fra loro equilibrate  $\mathbf{p}_a$  e  $\mathbf{p}_b$  con altre due distribuzioni di forze ancora fra loro equilibrate  $\mathbf{p}'_a$  e  $\mathbf{p}'_b$  e staticamente equivalenti alle  $\mathbf{p}_a$  e  $\mathbf{p}_b$  (cioè aventi medesima risultante e medesimo momento risultante). Chiaramente potremo sempre supporre che:

$$\mathbf{p}'_a = \mathbf{p}_a + \delta\mathbf{p}_a \quad ; \quad \mathbf{p}'_b = \mathbf{p}_b + \delta\mathbf{p}_b \quad 4.1$$

dove  $\delta\mathbf{p}_a$  e  $\delta\mathbf{p}_b$  sono distribuzioni di forze superficiali non necessariamente piccole ma obbligatoriamente autoequilibrate (cioè con risultante e momento risultante nulli). In caso contrario infatti,  $\mathbf{p}'_a$  e  $\mathbf{p}'_b$  non sarebbero staticamente equivalenti a  $\mathbf{p}_a$  e  $\mathbf{p}_b$ . Poiché si considera un solido elastico-lineare, dalle 4.1 segue che lo stato di tensione che si crea nel cilindro per effetto delle distribuzioni  $\mathbf{p}'_a$  e  $\mathbf{p}'_b$  è la sovrapposizione di quello dovuto alle distribuzioni iniziali  $\mathbf{p}_a$  e  $\mathbf{p}_b$  e di quello dovuto alle distribuzioni  $\delta\mathbf{p}_a$  e  $\delta\mathbf{p}_b$ . Ma per quanto abbiamo dimostrato nel paragrafo precedente,  $\delta\mathbf{p}_a$  non può produrre effetti tensionali a distanza sufficientemente grande dalla base iniziale del cilindro. Infatti  $\delta\mathbf{p}_a$  è una distribuzione di forze autoequilibrate e quindi per il teorema della equivalenza elastica a distanza sufficientemente grande dalla regione in cui tale distribuzione è applicata, gli effetti tensionali ad essa associati sono senz'altro trascurabili. Un discorso analogo vale ovviamente per la distribuzione  $\delta\mathbf{p}_b$ , il cui effetto sarà apprezzabile solo a ridosso della base finale del cilindro. Il principio del Saint Venant è quindi dimostrato.

Si noti che al contrario delle  $\delta\mathbf{p}_a$  e  $\delta\mathbf{p}_b$ , le distribuzioni  $\mathbf{p}_a$  e  $\mathbf{p}_b$  creano in generale all'interno del

cilindro uno stato di tensione ben definito, che sicuramente non tende a scemare allontanandosi dalle basi. Infatti, a meno che le  $\mathbf{p}_a$  e  $\mathbf{p}_b$  non siano autoequilibrate, non si possono applicare alle sezioni trasversali del cilindro le conclusioni del teorema della equivalenza elastica, in quanto per tali sezioni non è possibile realizzare le ipotesi sulle quali si basa il teorema stesso (accrescimento per apporto di materia). Una situazione del tutto diversa si verifica invece per il solido schematizzato in Figura 4.1. In questo caso infatti, nelle sezioni longitudinali che tagliano il solido sopra la regione laterale interessata dai carichi, sono senz'altro verificate le ipotesi del teorema della equivalenza elastica per cui si può concludere, come peraltro è intuitivo, che ad una certa distanza dalla regione interessata dai carichi, lo stato di tensione dovuto alle distribuzioni  $\mathbf{p}_a$  e  $\mathbf{p}_b$  (supposte ovviamente fra loro equilibrate, anche se differenti) è senz'altro nullo.

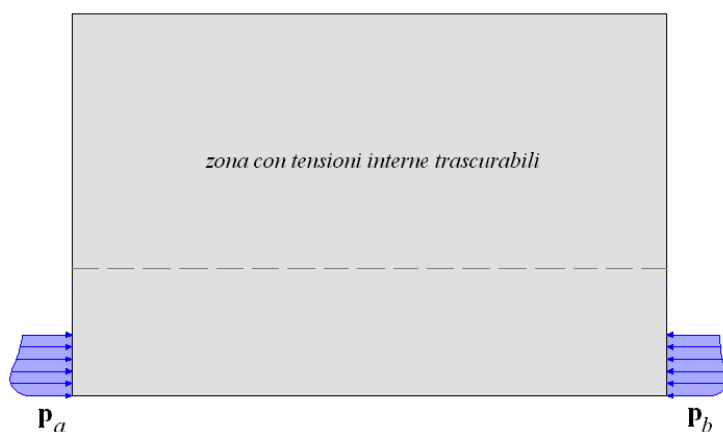


Figura 4.1

## 5. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

La dimostrazione del principio del Saint Venant ottenuta nel paragrafo precedente, mostra come il principio in questione non valga solo nel caso del problema del Saint Venant, ma sia invece una proprietà pressoché generale dei solidi elastico-lineari non soggetti a forze di massa.<sup>(11)</sup> Nella dimostrazione infatti, le uniche ipotesi assunte, oltre alla assenza di forze di massa, sono la semplice elasticità-lineare (non si richiede né isotropia né omogeneità) e la possibilità di poter realizzare un ideale accrescimento indefinito del corpo. Quest'ultima ipotesi può ovviamente essere soddisfatta solo se la regione del contorno del corpo sulla quale agiscono i carichi non coincide con l'intero contorno, e di fatto è questa l'unica limitazione effettiva che può avere rilevanza pratica; noi l'abbiamo formalizzata dicendo che  $\Sigma_p$  è una porzione di  $\Sigma$  e scrivendo  $\Sigma_p \subset \Sigma$ . In ogni caso comunque nessuna ipotesi è fatta sulla forma di questa regione per cui essa può anche considerarsi, come più volte si è detto, molteplicemente connessa. Ciò consente di considerare situazioni di carico pressoché arbitrare, nelle quali è anche possibile identificare alcune distribuzioni di forze con eventuali reazioni di vincoli. Resta allora giustificata anche gran parte della cosiddetta *teoria tecnica delle travi*, sebbene una giustificazione completa di questa teoria essenzialmente empirica, non può ottenersi per mezzo del solo teorema della equivalenza elastica.<sup>(12)</sup>

<sup>11)</sup> Più in generale si può dimostrare che questa è una proprietà della semplice elasticità. Si veda a tale proposito: O. Zanaboni, "Estensione del teorema di Saint-Venant ai solidi con deformabilità non lineare", Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni dell'Università di Pisa, Volume XIV - (1974-1975).

<sup>12)</sup> Per maggiori dettagli sulla "teoria tecnica della trave" si veda ad esempio: O. Belluzzi, "Scienza delle Costruzioni", Zanichelli, Vol. 1, Par. fi 201 – 204, pag. 296. Si veda anche: L. F. Donato, "Lezioni di Scienza delle Costruzioni", Editore Colombo Corsi, Parte Seconda, Cap. 1, Par. 4, pag. 8.

Chiaramente, le argomentazioni finora svolte non consentono di quantificare la distanza minima dalle regioni di applicazione delle forze ove lo stato di tensione da esse causato risulta trascurabile. Questo argomento, anche di notevole interesse pratico, è stato oggetto di numerosi studi soprattutto nell'ambito del problema del Saint Venant e lo stesso Zanaboni ha fornito a questo riguardo delle limitazioni valide per alcune forme della sezione trasversale.<sup>(13)</sup> Senza entrare nello specifico, qui osserviamo solo che in linea di massima e relativamente al problema del Saint Venant, si può dire che (v. Capurso, "Lezioni di Scienza delle Costruzioni", Pitagora Editrice, Cap. 7, Par. 7.1, pag. 255):

*“Se le dimensioni dell'elemento caricato sono dello stesso ordine di grandezza della dimensione più piccola del corpo, lo smorzamento dello stato tensionale associato a carichi autoequilibrati è talmente rapido che a distanze all'incirca uguali alla maggiore delle dimensioni dell'elemento caricato il regime tensionale può ritenersi praticamente nullo”.*

Il problema a cui ora abbiamo accennato esula comunque dallo scopo del presente scritto e quindi non ci dilungheremo oltre su di esso.

---

---

<sup>13)</sup> Si veda a tale proposito la Nota 4.

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

## BIBLIOGRAFIA GENERALE

- [1] R. Baldacci, “Scienza delle Costruzioni”, Vol. 1, UTET.
- [2] O. Belluzzi, “Scienza delle Costruzioni”, Vol. 1, Zanichelli.
- [3] M. Capurso, “Lezioni di Scienza delle Costruzioni”, Pitagora Editrice.
- [4] L. F. Donato, “Lezioni di Scienza delle Costruzioni”, Parte Seconda, Editore Colombo Corsi.
- [5] A. Sollazzo – S. Marzano, “Scienza delle Costruzioni”, Vol. 2, UTET.
- [6] S. Timoshenko, “Theory of Elasticity”, McGraw-Hill.
- [7] O. Zanaboni, “Dimostrazione Generale del Principio del De Saint-Venant”, Rendiconti della Regia Accademia dei Lincei, Ano 1937, Vol. 25, pag. 117.

### Articoli collaterali

- [a] O. Zanaboni, Rendiconti della Regia Accademia dei Lincei, Ano 1937, Vol. 25, pag. 595.
- [b] R. A. Toupin, “Saint-Venant's principle”, Arch. Rat'l Mechanics Anal. 18 (1965), pag. 83.
- [c] J. L. Ericksen, “Uniformity in shells”, Arch. Rat'l Mechanics Anal. 37 (1970), 73.
- [d] O. Zanaboni, “Estensione del Teorema di Saint-Venant ai Solidi con Deformabilità Non Lineare”, Atti dell'Istituto di Scienza delle Costruzioni dell'Università di Pisa, Volume XIV - (1974-1975).

PAGINA INTENZIONALMENTE VUOTA

## **INDICE GENERALE**

<b>1. PROBLEMA E PRINCIPIO DEL SAINT VENANT</b>	<b>1</b>
<b>2. PROPOSIZIONE PRELIMINARE ALLA DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA DELLA EQUIVALENZA ELASTICA</b>	<b>2</b>
<b>3. IL TEOREMA DELLA EQUIVALENZA ELASTICA</b>	<b>5</b>
<b>4. DIMOSTRAZIONE DEL PRINCIPIO DEL SAINT VENANT</b>	<b>7</b>
<b>5. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE</b>	<b>8</b>
<b>BIBLIOGRAFIA GENERALE</b>	<b>11</b>