PERCHE', DI DUE CICLISTI CHE PERCORRONO LA MEDESIMA DISCESA SENZA PEDALARE E CON BICICLETTE UGUALI, E' PIU' VELOCE QUELLO CHE PESA DI PIU', IN APPARENTE CONTRADDIZIONE COL FATTO CHE L'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' E' UGUALE PER ENTRAMBI? – Viene spiegato un modello meccanico che ne rende conto.

Questo paradosso è a volte indicato col nome di "Paradosso del camion". L'autista che trasporta un carico di pietrisco in discesa lungo i tornanti di un colle ne è consapevole e mette in atto i giusti provvedimenti di guida.

Per impostare il modello che risponde alla domanda del titolo, incominciamo col richiamare, riferendoci alla Fig. 1, la nota formula che esprime la velocità con la quale un punto materiale (di massa M) che percorre un piano inclinato sotto l'azione della forza di gravità, raggiunge un punto finale P_2 partendo da fermo da un punto iniziale P_1.

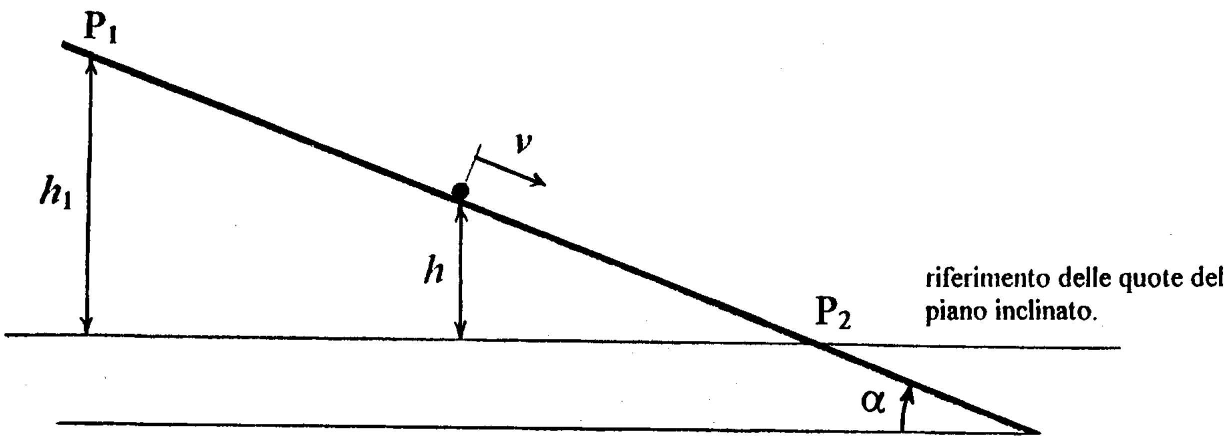

Fig. 1

L'energia cinetica E_{c} e l'energia potenziale E_{p} del punto materiale alla generica quota h rispetto al riferimento delle quote mostrato in figura, sono date rispettivamente dalle seguenti relazioni:

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2} M v^2 \tag{1}$$

$$E_{\mathrm{p}} = Mgh \tag{2}$$

ove v è la velocità raggiunta dal punto alla quota h e g è l'accelerazione di gravità:

$$g = 9{,}81 \left[\frac{m}{s^2} \right] \tag{3}$$

L'energia complessiva del punto materiale, alla generica quota h, è quindi:

$$E_{\mathrm{tot}} = \frac{1}{2} M v^2 + Mgh \tag{4}$$

Poiché si fa astrazione da fenomeni dissipativi, l'energia totale è costante durante il moto. Possiamo quindi applicare il Teorema di conservazione dell'energia, scrivendo l'uguaglianza tra l'energia in P_1 e quella in P_2. Poiché in P_1 è nulla l'energia cinetica (il punto parte da fermo), mentre in P_2 è nulla l'energia potenziale (per P_2 passa la linea di riferimento delle quote), avremo:

$$Mgh_1 = \frac{1}{2}Mv_2^2 \tag{5}$$

da cui si trae:

$$v_2 = \sqrt{2gh_1} \tag{6}$$

Questa formula dimostra, non contenendo la massa, che la velocità finale per un punto materiale che parta da fermo, dipende solo dalla quota iniziale di partenza. Pertanto ogni corpo "assimilabile ad un punto materiale" che, partendo da fermo, percorra senza attrito un piano inclinato, giunge in un punto finale con la medesima velocità qualunque sia la sua massa. (Esperimento di Galileo). Si può allora dire, dal momento che l'esperienza dice che la velocità di un ciclista in discesa "non pedalante" è influenzata dalla sua massa (o peso), che il modello "punto materiale" per lui non è applicabile al fine di calcolare la sua velocità finale. Ecco, perché stiamo ricercando un modello diverso.

Pensiamo che non occorrano spiegazioni per assumere come più aderente alla realtà del sistema "bicicletta-ciclista", il modello raffigurato in Fig. 2, consistente in due ruote omogenee (dischi) di massa *m* e raggio *R* e da un'asta rigida omogenea di massa *M* e lunghezza *l* che le collega.

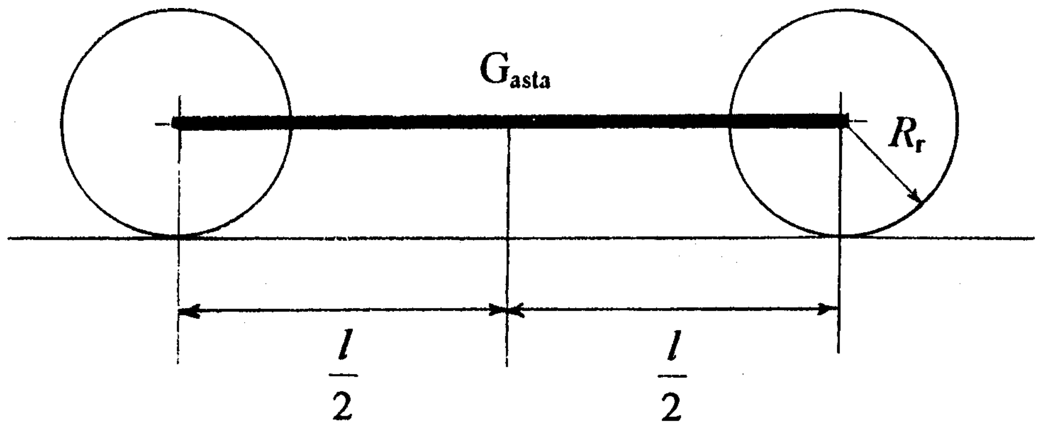

Fig. 2

In questo schema, nel quale l'asta simula il ciclista avente massa $M >> m$, le ruote rotolano senza strisciare sul piano inclinato, mentre l'asta trasla parallelamente ad esso, come viene mostrato la Fig. 3.

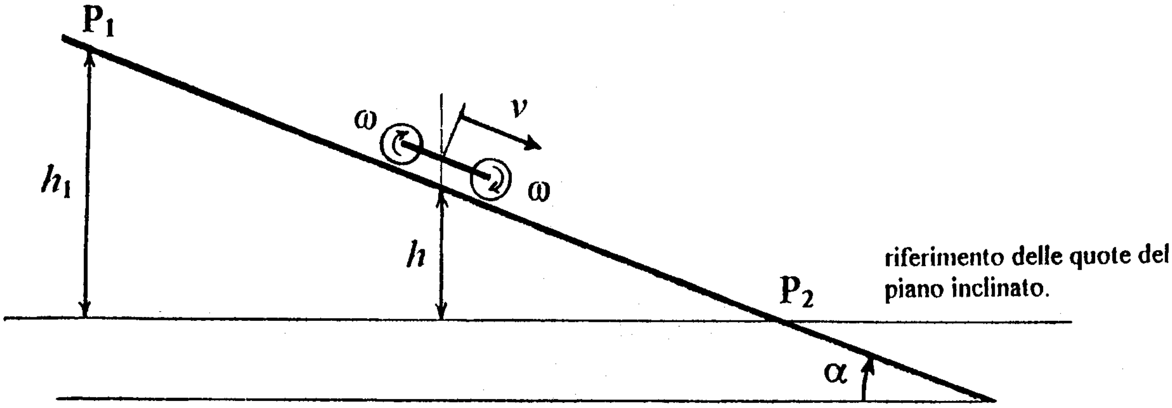

Fig. 3

L'energia cinetica dell'asta $E_{\mathrm{c(asta)}}$ e la sua energia potenziale $E_{\mathrm{p(asta)}}$, quando il baricentro dell'asta $\mathrm{G}_{\mathrm{(asta)}}$ si trova sulla verticale corrispondente alla generica quota h del piano inclinato, sono date rispettivamente dalle relazioni:

$$E_{\mathrm{c(asta)}} = \frac{1}{2}Mv^2 \tag{7}$$

$$E_{\mathrm{p(asta)}} = Mgh' \tag{8}$$

ove h' è dato da:

$$h' = h + \frac{R}{\cos\alpha}, \tag{9}$$

essendo $\frac{R}{\cos\alpha}$ la "quota aggiuntiva" del baricentro $\mathrm{G}_{\mathrm{(asta)}}$ dovuta alle ruote.

Venendo a considerare le energie cinetica e potenziale delle due ruote, posteriore e anteriore, queste sono nell'ordine:

$$E_{\mathrm{c(ruota\ post)}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{G}}\omega^2 \tag{10}$$

$$E_{\mathrm{p(ruota\ post)}} = mg\left(h' + \frac{l}{2}\mathrm{sen}\alpha\right) \tag{11}$$

$$E_{\mathrm{c(ruota\ ant)}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I_{\mathrm{G}}\omega^2 \tag{12}$$

$$E_{\mathrm{p(ruota\ ant)}} = mg\left(h' - \frac{l}{2}\mathrm{sen}\alpha\right) \tag{13}$$

ove I_G è il momento d'inerzia delle ruote rispetto al loro asse di rotazione e ω, la velocità di rotolamento. Nelle relazioni scritte si tiene conto del fatto che il baricentro delle ruote ha la stessa velocità istantanea del baricentro dell'asta $G_{(asta)}$, e del fatto che la loro quota si ottiene sommando o sottraendo ad h' la "quantità di quota" $\frac{l}{2}\text{sen}\alpha$ (v. Fig. 4)

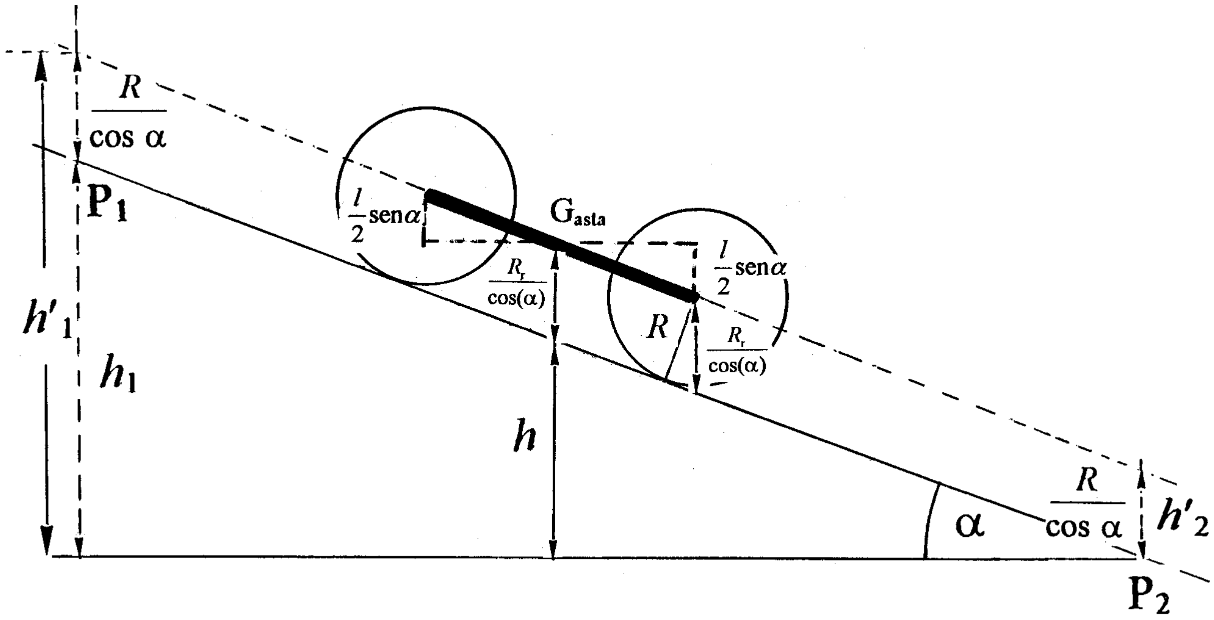

Fig. 4

Si tengano per il seguito presenti le formule:

$$I_G = \frac{1}{2} m R^2 \tag{14}$$

$$\omega = \frac{v}{R} \tag{15}$$

che esprimono, la prima, il momento d'inerzia baricentrale delle ruote, e la seconda, la relazione tra la velocità lineare e la velocità angolare nel rotolamento.

Abbiamo ora tutti gli elementi per scrivere l'espressione dell'energia complessiva del sistema assunto come modello, in quanto questa è data dalla somma:

$$E_{tot} = E_{c(asta)} + E_{c\,(ruota\ post)} + E_{c\,(ruota\ ant)} + E_{p\,(asta)} + E_{p\,(ruota\ post)} + E_{p\,(ruota\ ant)} \tag{16}$$

che in base alle formule precedenti fornisce:

$$E_{tot} = \frac{1}{2}(M + 3m)v^2 + (M + 2m)gh' \tag{17}$$

Applicando, come nel caso del punto materiale, il Teorema di conservazione dell'energia (giustificato dalla supposta assenza di azioni dissipative), il che ci permette di uguagliare l'energia totale associata alla configurazione in cui $G_{(asta)}$ giace sulla verticale per P_1, all'energia totale associata alla configurazione in cui $G_{(asta)}$ giace sulla verticale per P_2, otteniamo:

$$(M+2m)gh'_1 = \frac{1}{2}(M+3m)v_2^2 + (M+2m)gh'_2 \tag{18}$$

ove è:

$$h'_1 = h_1 + \frac{R}{\cos\alpha} \tag{19}$$

$$h'_2 = \frac{R}{\cos\alpha} \tag{20}$$

Dalla (18), tenendo conto delle (19) e (20), si ricava:

$$v_2 = \sqrt{\frac{M+2m}{M+3m}2gh_1} \tag{21}$$

e osservando che:

$$\frac{M+2m}{M+3m} = \frac{M+3m-m}{M+3m} = 1 - \frac{m}{M+3m} \tag{22}$$

si ha in definitiva:

$$v_2 = \sqrt{\left(1 - \frac{m}{M+3m}\right)2gh_1} \tag{23}$$

la quale fornisce la velocità finale in P_2 col modello assunto. Vediamo così che con questo modello discretamente aderente al sistema fisico "bicicletta-ciclista", la velocità finale viene ad essere dipendente dalla massa *M* (o peso) del ciclista, nel senso che a maggior massa corrisponde maggiore velocità finale v_2. (Infatti per *M* crescente la quantità entro parentesi nella (23) si approssima al valore 1 che è il massimo consentito.

La (23) ci permette anche di trovare il legame tra il modello studiato e quello (inadatto) fondato sul solo punto materiale di massa *M*. Vediamo infatti, che se poniamo *m* = 0 nella (23), ricadiamo nella formula (6). Si conclude quindi che è proprio la presenza delle ruote a dar ragione dell'apparente contraddizione racchiusa nella "domanda-titolo". Il che, forse, era da immaginare!

ESEMPIO NUMERICO

Massa della ruota della bicicletta:	m	=	3 kg
Massa del primo ciclista + telaio:	M_1	=	100 kg
Massa del secondo ciclista + telaio:	M_2	=	50 kg
Quota iniziale (dislivello)	h_1	=	200 m

Con i dati di cui sopra, la formula (23) fornisce:

Per il primo ciclista: $v_2^{(1)} \cong 62\left[\frac{m}{s}\right]$

Per il secondo ciclista: $v_2^{(2)} \cong 61\left[\frac{m}{s}\right]$

Gli alti valori sono dovuti alla supposta assenza di resistenze, soprattutto di quella dell'aria. Come si vede, il fenomeno studiato non è però tale da comportare grandi differenze tra i due casi.

Alberto Busato